

Valószínűesszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematika BSC-seknek

2019/2020 1. félév

Zempléni András

zempleni@caesar.elte.hu

<http://zempleni.elte.hu>

További általánosítás

- Végtelen sok eseményt függetlennek nevezünk, ha tetszőlegesen kiválasztva közülük véges sokat, független eseményeket kapunk.
- A szorzat-előállítás segítségével végtelen sok független kísérlethez tartozó valószínűségi mező is értelmezhető. Ha A_i az i -edik kísérlethez tartozik, akkor $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ független.

Valószínűségi változók 1.

- A legtöbbször nem maga a kísérlet kimenetele (a realizálódott elemi esemény) hanem egy számszerűsíthető eredmény az érdekes.
- Példa: ipari termelés – minőségellenőrzés: a kérdés az esetleges selejtesek száma, nem pedig az, hogy pontosan melyik elemeket is választottuk.
- Sok gyakorlati esetben nem is adódik természetesen az Ω halmaz (pl. időjárás megfigyelés).

Valószínűségi változók 2.

- Mintavételi példa (folytatás). N termék, n elemű minta. Ω elemszáma: $\binom{N}{n}$
- Selejtesek száma (X): 0 és n közötti szám.
- Matematikailag: $X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ függvény
- Feltétel: legyen értelme pl. annak a valószínűségéről beszélni, hogy $X < a$. Azaz $\{\omega: X(\omega) < a\} \in \mathcal{A}$ kell, hogy teljesüljön minden a -ra. Hasonlóképpen más „természetes” feltételnek is legyen valószínűsége.

Borel halmazok

A feltétel precíz felírásához:

Definíció. A valós számegegyenes Borel halmazai : az a legszűkebb σ -algebra, amely tartalmazza a félegyeneseket (intervallumokat, nyílt halmazokat...). Gyakorlatilag: minden olyan halmaz, amit legfeljebb megszámlálhatóan sok halmazművelettel az intervallumokból elő tudunk állítani.

- Jelölés : $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Valószínűségi változók 3.

- Precíz definíció: $X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ függvény valószínűségi változó, ha $\{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden B Borel halmazra.
- Ha $\mathcal{A} = \emptyset(\Omega)$, akkor minden $\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ függvény valószínűségi változó.
- A feltételek a gyakorlatban:
 - egyértelmű az X értéke az ω -kon (azaz ha csak a színvakságot ellenőrizzük, $\Omega = \{\text{színvak}, \text{egészséges}\}$, akkor a beteg nemét nem tudjuk, a nem kódja tehát ennél az eseménytérnél nem valószínűségi változó).
 - Ha többfajta színvakság is elképzelhető, de ezek valószínűségére nem is vagyunk kíváncsiak, akkor ugyan $\Omega = \{\text{színvak}_1, \text{színvak}_2, \text{egészséges}\}$, de $\mathcal{A} = \{\emptyset, \text{színvak}, \text{egészséges}, \Omega\}$ és így az az X , ami a színvakság típusát is kódolja, nem valószínűségi változó.

Példák

- Kockadobás:
 - X a dobott szám. $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, $X(i) = i$.
Értékkészlete: $\{1, 2, \dots, 6\}$.
 - X az első olyan dobás sorszáma, amikor 6 jön ki.
 $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\} \dots$
 X értékkészlete: $\{1, 2, \dots\}$
- Ipari termelés:
 - X az első selejt gyártásának időpontja. X értékkészlete: \mathbf{R}_+ .
 - X egy adott termék hossza. X értékkészlete: \mathbf{R} .
részhalma (nem szükséges előzetesen korlátozni).

Valószínűségi változók eloszlása

- Mivel a gyakorlati problémáknál Ω nem mindig adható meg egyértelműen, és absztrakt halmazok helyett szívesebben dolgozunk a valós számokkal, a kulcsfogalom a *valószínűségi változók eloszlása*.
- Legyen B tetszőleges Borel halmaz.
 $Q_X(B) = P\{\omega: X(\omega) \in B\}$ valószínűséget ad meg \mathbf{R} Borel halmazain. Ez az X eloszlása.

Diszkrét valószínűségi változók

- Definíció: az X *diszkrét valószínűségi változó*, ha értékkészlete (x_1, \dots, x_n, \dots) legfeljebb megszámlálható.
- A valószínűségi változó definíciójából adódóan $\{\omega: X(\omega) = x_j\} = \{X = x_j\} \in \mathcal{A}$ azaz $p_j := P(X = x_j)$ értelmes. Ezek meg is határozzák X eloszlását.
- Véges vagy megszámlálható valószínűségi mezőn minden valószínűségi változó diszkrét.
- Általában nem célszerű a természetesen folytonos értékkészletű X diszkrétizálása (egyszerűbbek a folytonos modellek).

Példák

- $X(\omega) = c$ minden ω -ra. $Q_X(B) = \begin{cases} 0 & \text{ha } c \notin B \\ 1 & \text{ha } c \in B \end{cases}$
Elnevezés: elfajult eloszlás.
 $P(X = c) = 1$.
- X akkor 1, ha egy adott, p valószínűségű A esemény bekövetkezik és 0 különben (elnevezés: az A esemény *indikátora*).
 $P(X = 0) = 1 - p$
 $P(X = 1) = p$
 $Q_X(B) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \notin B \text{ és } 1 \notin B \\ p, & \text{ha } 0 \notin B \text{ és } 1 \in B \\ 1 - p, & \text{ha } 0 \in B \text{ és } 1 \notin B \\ 1, & \text{ha } 0 \in B \text{ és } 1 \in B \end{cases}$

Példák 2.

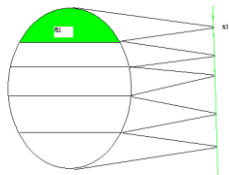
- Mintavételnél legyen X a mintában levő selejtesek száma.
 - Visszatevéses esetben (**binomiális eloszlás**):
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k} \quad (k = 0, \dots, n)$$
 - Visszatevés nélküli esetben: (**hipergeometriai eloszlás**)
$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (k = 0, \dots, n)$$

Tulajdonságok

- Ha X diszkrét valószínűségi változó, $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tetszőleges függvény, akkor $f(X)$ is diszkrét valószínűségi változó.
- Példa: X a gyártott termék hossza mm-ben. Tegyük fel, hogy $P(X = 18) = \dots = P(X = 22) = 1/5$. T.f.h. az ideális a 20 mm. Ekkor a $d = |X - 20|$ eloszlása: $P(d = 0) = 1/5$,
 $P(d = 1) = P(d = 2) = 2/5$.

Teljes eseményrendszer

- Ha X diszkrét valószínűségi változó, akkor az $A_i = \{\omega: X(\omega) = x_i\}$ események teljes eseményrendszert alkotnak.



Feltételes eloszlás

- X feltételes eloszlása A eseményre vonatkozóan: $q_i := P(X = x_i | A)$. Ez is eloszlás:

$$\sum_i q_i = \sum_i P(X = x_i | A) = \sum_i \frac{P(X = x_i \cap A)}{P(A)} = 1$$

- Példa: X a magyarkártya-csomagból 2 (visszatevéses) húzásból kapott pirosak száma.
a/ $A = \{\text{az első lap ász}\}$
b/ $A = \{\text{az első lap zöld}\}$

Valószínűségi változók függetlensége

- X és Y diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha
 $P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_k\}) = P(X = x_i)P(Y = y_k)$ teljesül minden i, k értékre. (Azaz az X -hez és az Y -hoz tartozó teljes eseményrendszerek függetlenek.)
- Megjegyzések:
 - az elfajult eloszlású valószínűségi változó minden valószínűségi változótól független.
 - Önmagától csak az elfajult eloszlású valószínűségi változó független.

Példák

- Függetlenek
 - Visszatevéses mintavételnél az egyes kísérletek eredményei
 - egymás utáni kockadobások
- Nem függetlenek
 - Visszatevés nélküli mintavételnél az egyes kísérletek eredményei
 - lottóhúzásnál az egymás utáni számok
- Kérdés: Két kockadobás összege független-e ugyanezen két dobás különbségétől?

Függetlenek-e?

- A napi középhőmérséklet Budapesten az idén szeptember 30-án és jövőre ilyenkor
- A sajtóhibák száma egy könyv két különböző oldalán
- Két háztartás áramfogyasztása ugyanazon a napon
- Két beteg vérnyomása
- Egy beteg vérnyomása két különböző vizsgálatnál