Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematikai elemző BSC-seknek

2019/2020 1. félév

Zempléni András

zempleni@caesar.elte.hu

http://zempleni.elte.hu

Véletlen bolyongás

- $S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$ a bolyongást végző „részecske" helyzete n lépés után. A lépések egymástól függetlenek.

$$X_i = \begin{cases} +1 & p \text{ valószínűséggel} \\ -1 & 1\text{-}p \text{ valószínűséggel} \end{cases}$$

- Tipikusan p=1/2 (szimmetrikus bolyongás)
- Példa: X_i az i-dik érmedobásnál a nyereményünk (1 Ft-ot nyerünk, ha fej, 1Ft-ot vesztünk, ha írás), S_n pedig az össznyereményünk n játék után.

Szimmetrikus véletlen bolyongás: elemi valószínűségek, visszatérés az origóba

- Legyen $u_{2k}=P(S_{2k}=0)$. Megállapodás szerint $S_0=0$, így $u_0=1$.

$$u_{2k} = \binom{2k}{k} 2^{-2k} \quad k=1,2,\ldots$$

- Tul.: A bolyongás 1 valószínűséggel visszatér.
- f_{2k} annak a valószínűsége, hogy először a 2k időpontban tér vissza az origóba (k>0).
- f_{2n} nagyságrendje: $cn^{-3/2}$, ami miatt az origóba való első visszatérés időpontjának nem véges a várható értéke.
- szimuláció

Utolsó visszatérés

- A bolyongást 2n-ig vizsgálva, annak valószínűsége, hogy a részecske a 2k-dik időpontban tér vissza utoljára az origóba:

$$u_{2k}u_{2n-2k} = \frac{\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}} \approx \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}$$

ha k és n is nagy. Ennek a függvénynek az n/2–ben minimuma van és szimmetrikus is n/2-re.

A tönkremenés valószínűsége

- Érmével játszunk.
  Nekünk a Ft-unk, ellenfelünknek b Ft-ja van.
  Ha fej jön ki, nyerünk 1Ft-ot, ha írás, akkor vesztünk ugyanennyit.
  Mi a valószínűsége, hogy mi nyerjük el az ellenfelünk összes pénzét?
- Legyen P_t a keresett valószínűség, ha t Ft-unk van.
- Rekurzió: $P_t = p\, P_{t+1} + (1-p)\, P_{t-1}$.
  Megoldás:

$$P_a = \begin{cases} \dfrac{a}{a+b}, \text{ ha } p=1/2 \\[2ex] \dfrac{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^a}{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{a+b}}, \text{ ha } p \neq 1/2 \end{cases}$$

Többdimenziós véletlen bolyongás

- Kétdimenzióban:
  - Lehetséges lépések a tengelyek irányában: ¼-¼ valószínűséggel.
  - Itt is 1 valószínűségű a visszatérés.
- Három dimenzióban:
  - Lehetséges lépések a tengelyek irányában: 1/6-1/6 valószínűséggel.
  - Itt már 1-nél kisebb valószínűségű a visszatérés (Pólya tétele).

Markov láncok

- Legyen $\underline{X}=(X_1, X_2,\dots, X_n)$: $\Omega\to\boldsymbol{I}^n$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó.
- Eddig a független esetet vizsgáltuk. Most eltekintünk ettől.
- $Q_X(\underline{k}):=P\{\omega: \underline{X}(\omega)=\underline{k}\}$ az X *eloszlása* $\boldsymbol{I}^d$ elemein. Reális, de a függetlenségnél gyengébb feltételt keresünk.
- Tegyük fel, hogy $P(X_m = k_m)$ valószínűségeket megadásához elegendő az X_{m-1} értéket ismerni. Azaz $P(X_m = k_m | X_i = k_i$ minden $1\le i \le m-1$-re$)=$ $P(X_m = k_m | X_{m-1} = k_{m-1})$ (Markov tulajdonság). Azaz a Markov lánc következő értékének eloszlását meghatározza *a* lánc jelenlegi állapota.

Példák

- Ha az $\underline{X}=(X_1, X_2,\dots, X_n)$: $\Omega\to\boldsymbol{I}^n$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó koordinátái függetlenek, akkor a sorozat Markov lánc.
- Ha $X_n=X_{n-1}+Y_n$ ahol Y_n és X_{n-1} független, akkor X_n Markov lánc.
- További egyszerűsítés: tegyük fel, hogy a $P(X_m = k_m | X_{m-1} = k_{m-1})$ átmenetvalószínűségek nem függnek m-től (homogén Markov lánc). Jelölés: $p_{ij}:=P(X_m = j | X_{m-1} = i)$ átmenetvalószínűség-mátrix.
- A hőmérséklet napi értéke feltehetően nem homogén Markov lánc, mert ha ma 10 fok volt, akkor ha nyár van, akkor holnap inkább melegebb lesz, míg télen inkább hidegebb.

Többlépéses átmenetvalószínűségek

$P(X_m = j | X_{m-2} = i)$ kiszámítása:

$$P(X_m=j\mid X_{m-2}=i)=\sum_{k\in I}P(X_m=j\mid X_{m-1}=k)P(X_{m-1}=k\mid X_{m-2}=i)$$

(elnevezés: Chapman-Kolmogorov egyenlet).

azaz a $P^{(2)}$ kétlépéses átmenetvalószínűség-mátrixra $P^{(2)} = P^2$ (mátrix-hatvány). Ugyanígy a k-lépésesre $P^{(k)} = P^k$.

Példa: a szimmetrikus bolyongásnál $p_{i,i+1}= p_{i,i-1} =1/2$, a többi j-re $p_{i,j}=0$. Ebből a kétlépéses átmenetvalószínűségek: $p_{i,i+2}= p_{i,i-2} =1/4$, $p_{i,i} =1/2$, a többi j-re $p_{i,j}=0$

Tulajdonságok

- P minden elemére $p_{i,j} \ge 0$. $\sum_{j\in I} p_{k,j}=\sum_{j\in I} P(X_m=j\mid X_{m-1}=k)=1$
- A fenti tulajdonságok P^k-ra is igazak.
- Az i-ből a j elérhető ($i\to j$), ha van olyan k, melyre $p_{i,j}^{(k)} > 0$.
- Az i-és a j állapotok érintkezőek, ha $i\to j$ és $j\to i$.
- Az állapotok (I elemei) osztályozhatóak aszerint, hogy érintkezőek-e.

Példák

- A szimmetrikus bolyongásnál bármely két állapot érintkező.
- Az elnyelő falas bolyongásnál (addig játszunk, míg vagy a –a pontba vagy a b pontba nem jutunk), a két végállapot csak önmagával érintkezik.
- A populációs modelleknél (I a populáció egyedszáma) a 0 csak önmagával érintkezik.

További definíciók

- A Markov lánc irreducibilis, ha csak egy osztályból áll.
- $f_i^{(k)} :=P(X_k=i, X_{k-1}\ne i, X_{k-2}\ne i,\dots, X_1\ne i | X_0=i)$ az i-be való első visszatérés valószínűsége.
- $p_i^{(k)} :=P(X_k=i | X_0=i)$ az i-be való, k-lépésben történő visszatérés valószínűsége.
- Az i állapot visszatérő, ha $\sum_k f_i^{(k)}=1$
- Az i állapot periódusa d, ha $d=\text{lnko}\{k: p_i^{(k)}>0\}$.
- A visszatérőség és a periódus is osztálytulajdonság.

Stacionér eloszlás

- Ha megadható olyan π eloszlás az állapottéren, melyre teljesül, hogy $\pi P=\pi$, akkor ezt a Markov lánc stacionér eloszlásának nevezzük. Lineáris egyenletrendszer megoldásaként kaphatjuk meg.
- Nem irreducibilis esetben nem egyértelmű.
- Ha teljesül, hogy tetszőleges X_0 kiinduló eloszlás esetén az X_n eloszlása konvergál a stacionér eloszláshoz, akkor azt mondjuk, hogy a Markov-lánc ergodikus.

Ergodikus láncok

- Tétel. Ha a Markov-lánc aperiodikus (d=1), irreducibilis és van olyan n, hogy P^n-nek van csupa pozitív elemből álló oszlopa, akkor a Markov-lánc ergodikus.
- A konvergencia általában meglehetősen gyors, bár függ a kiinduló eloszlástól.
- Ergodikus esetben a π funkcionáljai (pl. $E\pi$) közelíthetőek a tapasztalati értékeivel:

$$f(\pi) \approx \sum_{i=1}^{n} f(X_i)/n$$

Érdemes-e pénzt párna alatt tartani?

- Pénzünket olyan részvénybe fektetjük, amelynek értéke egy év alatt 50%-os eséllyel 1,9-szeresére nő és ugyanolyan eséllyel a felére csökken.
- Várható éves hozam: 0,5*0,9+0,5*(-0,5)=0,2=20%
- Az évek során pénzünk várható értéke végtelenhez tart.

Érdemes-e pénzt párna alatt tartani? (folytatás)

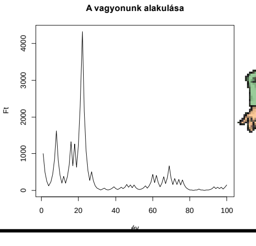
$$S_n = X_1 \cdot X_2 \dots X_n = e^{\ln(X_1)+\cdots+\ln(X_n)} = \left(e^{\frac{\ln(X_1)+\cdots+\ln(X_n)}{n}}\right)^n$$

$$\frac{\ln(X_1)+\cdots+\ln(X_n)}{n} \to \text{-2,6\%}$$

Tehát

$S_n \to 0$

Egy példa-futás:



1000 szimuláció eredménye

- Kiinduló tőke: 1000 Ft

Min.	1. Kv.	Medián	Átlag	3. Kv.	Max.
0.000e+00	1.000e+00	4.000e+01	2.84e+07	8.44e+03	2.015e+10

- Az esetek több, mint 66%-ában kevesebb lesz a pénzünk 1000 Ft-nál

A pénz fele párna alatt

$$S_n = X_1 \cdot X_2 \dots X_n = e^{\ln(X_1)+\cdots+\ln(X_n)} = \left(e^{\frac{\ln(X_1)+\cdots+\ln(X_n)}{n}}\right)^n$$

- Az átlagos éves hozam 10%

$$\frac{\ln(X_1)+\cdots+\ln(X_n)}{n} \to \text{4,2\%}$$

- Tehát $S_n \to \infty$

Eredmények

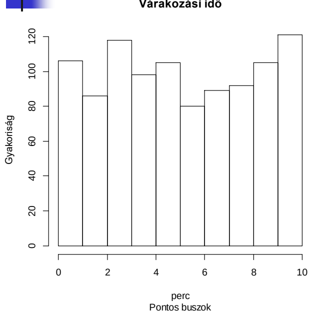
- 1000 szimuláció alapján:
- Min. 1.kvartilis Medián
  0 6327 45720
- Átlag 3.kvartilis Max.
  4692000 638700 $4{,}66 \cdot 10^8$

Matematikai feladat az optimális részarány megtalálása

Buszparadoxon

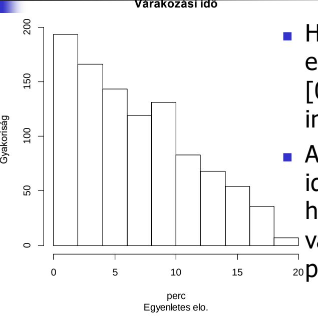
- Az autóbuszok átlagosan 10 percenként követik egymást. Egy buszmegállóba érkezve várhatóan hány percet kell várnunk a buszra?
- 5 percet, 10 percet, végtelen sokat?

Pontosan 10 percenként jönnek a buszok



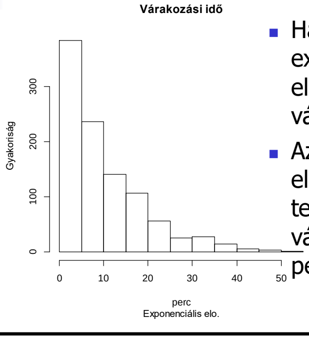
- A várakozási idő egyenletes eloszlás a [0;10] intervallumon, tehát az átlagos várakozási idő 5 perc

Átlagosan 10 percenként jönnek a buszok



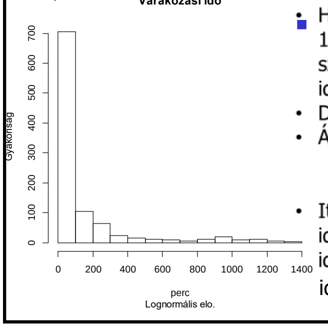
- Ha a követési időköz egyenletes eloszlású a [0;20] perc intervallumon:
- Az átlagos várakozási idő eloszlása háromszög-eloszlás, várható értéke 20/3 perc

Átlagosan 10 percenként jönnek a buszok



- Ha a követési időköz exponenciális eloszlású 10 perc várható értékkel:
- Az exponenciális eloszlás örökifjú, tehát az átlagos várakozási idő 10 perc

Átlagosan 10 percenként jönnek a buszok



- Ha a követési idő lognormális, 10 perc várható értékkel, a szimulált átlagos várakozási idő 145 perc
- De akár végtelen is lehet!
- Általános képlet:

$$m = \frac{1}{2}d\left(1+\frac{s^2}{d^2}\right)$$

- Itt m az átlagos várakozási időnk, d az átlagos követési időköz, s pedig a követési idő szórása