Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematikai elemző BSC-seknek

2019/2020 1. félév

Zempléni András
zempleni@caesar.elte.hu
http://zempleni.elte.hu

Műveletek eseményekkel

- Legyenek $A_1,\ldots$ események.
- limsup A_n : végtelen sok A_n–hez tartozó elemi események. Formálisan:

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

- liminf A_n : Azon elemi események, amelyek véges sok kivételével minden A_n–ben benne vannak.

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Borel-Cantelli lemma

- Ha A_1, A_2,... események és $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$ akkor P(lim sup A_n)=0.
- Bizonyítás.

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} C_n$$

ahol

$$C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, C_n \supseteq C_{n+1}\ldots$$

Ebből

$$P(\limsup A_n) = P(\lim_{n\to\infty} C_n) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

B-C lemma megfordítása

- Kellenek feltételek: Ω=[0,1], A_n=[0,1/n] P="hosszúság" esetén P(lim sup A_n)=0, de

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty$$

- Ha viszont az események függetlenek, akkor megfordítható (2. B-C lemma): ekkor $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty$ esetén P(lim sup A_n)=1.

$$P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{m} A_k) = 1 - \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A}_k)$$

$$= 1 - \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - P(A_k)) \ge 1 - \lim_{m\to\infty} \exp\{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)\} \to 1$$

Nagy számok erős törvénye

- Legyen X_1, X_2,... független, azonos eloszlású m várható értékkel. Tegyük fel, hogy E(X^4) véges. Ekkor

$$P\left(\left\{\omega : \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \ldots + X_n(\omega)}{n} \underset{n\to\infty}{\to} m\right\}\right) = 1$$

azaz (X_1+X_2+...+ X_n)/n $\to m$ 1 valószínűséggel.

- Megjegyzés: a tétel állítása már abból is következik, hogy m véges (de a bizonyítás sokkal nehezebb erre az esetre).

Bizonyítás.

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)\right]^4 = nE\left[(X_1 - m)^4\right] + 6\binom{n}{2}\left(E(X_1 - m)^2\right)^2 \le cn^2$$

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)\right| > n\varepsilon\right) \le \frac{E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)\right]^4}{(n\varepsilon)^4} \le \frac{cn^2}{(n\varepsilon)^4} = \frac{c'}{n^2}$$

amiből a Borel-Cantelli lemma miatt P(A_ε)=0, ahol

$$A_\varepsilon = \limsup\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m\right| > \varepsilon\right\} \qquad P\left\{\omega : \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)}{n} - m \to 0\right\} = 1 - P\left(\bigcup_k A_{1/k}\right) = 1$$

A nagy számok törvényének néhány alkalmazása

- Korlátos valószínűségi változókra teljesül a nagy számok erős törvénye.
- Monte Carlo módszerek: véletlen számokat használnak
  - A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlású, egymástól független véletlen számokat szimulálunk: X_1, X_2,... és ezek segítségével közelíthetünk például integrálokat:
    $\frac{f(X_1)+f(X_2)+\cdots+f(X_n)}{n} \to E(f(X))=\int_0^1 f(x)dx$
  - Az egyenletes eloszlásból más eloszlások is megkaphatóak

Konvolúció

- Független valószínűségi változók összegének eloszlása
- Képlet az abszolút folytonos esetre:

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)f_Y(z-u)du$$

- Bizonyításhoz a teljes valószínűség tétel megfelelője

$$P(A)=\int_{-\infty}^{\infty} P(A \mid X=u)f_X(u)du$$ ebből

$$P(X+Y<z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)P(X+Y<z \mid X=u)du=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)P(Y<z-u)du$$

ezután z szerint deriválva kapjuk az állítást.

Példák

- Exponenciális eloszlások konvolúciója (független, azonos, λ paraméterű exponenciális eloszlások összegének sűrűségfüggvénye):

$$h_{X+Y}(z)=\int_0^z \lambda e^{-\lambda u}\lambda e^{-\lambda(z-u)}du=\lambda^2\int_0^z e^{-\lambda z}du=\lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

ha z>0 és 0 különben. n tagú összegre indukcióval bizonyítható, hogy az összeg sűrűségfüggvénye

$$h_n(z)=\frac{\lambda^n z^{n-1}e^{-\lambda z}}{(n-1)!}$$

ha z>0 és 0 különben (elnevezés: n-ed rendű, λ paraméterű gamma eloszlás).

Egyenletes eloszlások konvolúciója

- Független, azonos, a [0,1] intervallumon egyenletes eloszlások összegének sűrűségfüggvénye):

$$f_{X+Y}(z)=\begin{cases}\int_0^z 1du=z \quad (0<z<1)\\ \int_{z-1}^1 1du=2-z \quad (1\le z<2)\end{cases}$$

- egyenletes eloszlás

Alkalmazások

- Korlátos valószínűségi változókra teljesül a nagy számok erős törvénye.
- Kérdés: lehet-e nemelfajult valószínűségi változó a határérték?
- Tétel: ha X_1, X_2,... független valószínűségi változók, b_n számsorozat, melyre $b_n \to \infty$ és $(X_1+X_2+\ldots+X_n)/b_n \to X$ 1 valószínűséggel, akkor X 1 valószínűséggel állandó.
- Tétel. Ha X_1, X_2,... független valószínűségi változók, b_n számsorozat, melyre $b_n \to \infty$ 1 valószínűséggel, és $(X_1+X_2+\ldots+X_n)/b_n \to X$ sztochasztikusan, akkor X 1 valószínűséggel állandó.
- A bizonyítás ötlete: sztochasztikusan konvergens sorozatnak mindig kiválasztható 1 valószínűséggel konvergens részsorozata.

Gyenge konvergencia

- Definíció. $X_n \to X$ gyengén, ha az eloszlásfüggvényeikre teljesül: $F_n(z) \to F(z)$ az F minden folytonossági pontjában.
- Megjegyzés. Ez a konvergencia nem mond semmit a valószínűségi változók közelségéről. Ω=[0,1], P="hosszúság", $X_n=I_{[0,0.5]}$ $X=I_{[0.5,1]}$ esetén $F_n(z)=F(z)$, azaz teljesül a gyenge konvergencia.
- A fentiekből az is látszik, hogy a határértéknek csak az eloszlása érdekes.

Tulajdonságok

- Azt nem célszerű megkövetelni, hogy F minden pontjában teljesüljön a konvergencia:
- $X_n=\delta_{-1/n}$ esetén $X_n \to X=\delta_0$ 1 valószínűséggel. $F_n(0)=1$, de $F(0)=0$ (F balról folytonos). A többi pontban teljesül a konvergencia: $F_n(z) \to 0$, ha $z<0$, $F_n(z)=1$, ha $z>0$.
- Ha $X_n \to X$ sztochasztikusan, akkor $X_n \to X$ gyengén is.
- Def. $X_n \to X$ L_2-ben, ha $E(X_n-X)^2 \to 0$ $(n \to \infty)$.
- A Csebisev egyenlőtlenség értelmében az L_2 -beli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia. (A nagy számok gyenge törvényeinél is L_2–beli konvergenciát bizonyítottunk.)

Generátorfüggvény

- Legyen X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. A generátorfüggvénye $g_X(z):=E(z^X)=P(X=0)+zP(X=1)+z^2P(X=2)+\ldots$
- Tulajdonságai:
  - Véges, ha $|z|\leq 1$
  - Meghatározza az X eloszlását:
    - $P(X=0)=g_X(0)$
    - $P(X=1)=g_X'(0)$
    - $P(X=2)=g_X''(0)/2$ stb.
  - Ha X és Y függetlenek, nemnegatív egész értékűek: $g_{X+Y}(z)=g_X(z)g_Y(z)$, mert $E(z^{X+Y})=E(z^X z^Y)=E(z^X)\,E(z^Y)$ a függetlenség miatt.