Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematikai elemző BSC-seknek

2019/2020 1. félév

Zempléni András
zempleni@caesar.elte.hu
http://zempleni.elte.hu

1. előadás: Bevezetés

- Irodalom, követelmények
- A félév célja
- Valószínűségszámítás tárgya
- Történet
- Alapfogalmak
- Valószínűségek kiszámítása

Irodalom

- Hozzáférhető jegyzetek
  Arató-Prokaj-Zempléni: Valószínűségszámítás elektronikus jegyzet (saját honlapomon)
  Balázs M., Tóth B.: Valószínűégszámítás 1. jegyzet matematikusoknak és fizikusoknak. Elérési helye: http://math.bme.hu/~balazs/vsz1jzetb-t.pdf
  Tankönyvek:
  - Prékopa: Valószínűségelmélet
  - Rényi: Valószínűségszámítás
  - S. Ross: A First Course in Probability
- Példatár
  - Bognárné-Mogyoródi-Prékopa-Rényi-Szász: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény

Számonkérés

- Gyakorlati jegy: csoportonkénti zh-k alapján
- Vizsga: írásbeli, később egyeztetendő időpontban. Vizsgapontok szerezhetőek az előadáson, villámkérdések írásbeli megválaszolásával is
- Előadások anyaga:
  zempleni.elte.hu/valsz1_19.html

Cél

- Valószínűségszámítás alapjainak ismertetése
- Feladatmegoldási készség kialakítása (elsősorban gyakorlaton)
- Alkalmazási lehetőségek bemutatása (szimulációk, véletlen számok stb.)
- Matematikai statisztika (következő félév) megalapozása

Valószínűségszámítás helye a tudományok között

- Matematikai tudomány, mert precízen megfogalmazott axiómáxra épül.
- Gyakorlati alkalmazásai: statisztikai következtetések levonása (pl.: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej jött ki, akkor 99.9% valószínűséggel állítható, hogy az érme nem szabályos).

Történeti áttekintés 1.

- Első ismert feladat 1494-ből: játék idő előtti abbahagyása esetén hogyan osztozzanak? Helyes megoldás több, mint 100 évvel későbbi: Pascal (1623 – 1662), Fermat (1601 – 1665)
- Könnyen adható szimulációs megoldás (precíz számítás a gyakorlaton)
- Cardano (1540 körül) könyvet írt a kockajátékokhoz kapcsolódó valószínűségszámítási kérdésekről

Történeti áttekintés 2.

- de Mére lovag kérdése:
  - Egy kockával négyszer dobva előnyös arra fogadni, hogy lesz hatos, de 2 kockával 24-szer dobva már nem előnyös arra fogadni, hogy lesz (6,6) a dobások között.
  - Megoldás: Pascal, Fermat (1654)
- Huygens (1657): Az első valószínűségszámítás könyv
- de Witt, Halley (1671): életjáradék-számítás valószínűségi alapon

Történeti áttekintés 3.

- Jacob Bernoulli (1713): Ars Conjectandi (nagy számok törvénye)
- XVIII-XIX. sz: Moivre, Bayes, Gauss, Poisson
- Buffon: geometriai valószínűség bevezetése – paradoxonok
- XIX.sz: Csebisev, Markov, Ljapunov

Történeti áttekintés 4.

- Axiomatizálás: Kolmogorov (1933)
- Modern alkalmazások:
  - Információelmélet (Shannon)
  - Játékelmélet (Neumann)
  - Matematikai statisztika (Fisher)
  - Sztochasztikus folyamatok
- Magyar tudósok:
  - Jordán Károly (1871-1959)
  - Rényi Alfréd (1921-1970)

Véletlen kísérletek

- Olyan kísérletekkel foglalkozunk, amelyek eredményét nem tudjuk előre biztosan megmondani (kockadobás, lottóhúzás, meteorológiai, tőzsdei események stb).
- Az összes lehetséges eredmény: eseménytér.

Alapfogalmak

- Eseménytér
  - Kísérlet egy lehetséges kimenetele: elemi esemény, jelölése ω.
  - Elemi események összessége: eseménytér, Ω .
  - Ω részhalmazai: események ($A,B,C,\ldots$).
  - Esemény akkor következik be, ha az őt alkotó elemi események valamelyike bekövetkezik.

Példák

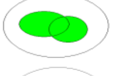
- Kockadobás: Ω={1,2,…,6}. Ha az *A* esemény: páros számot dobtunk, akkor *A*={2,4,6}.
- Érmét kétszer feldobva: Ω={*II*,*IF*,*FI*,*FF*} *A*={*II*,*IF*} az az esemény, hogy az első dobás írás.
- Érmét addig dobunk, míg fejet nem kapunk. Ω={*F*,*IF*,*IIF*,…,ω_∞} ahol ω_∞ =*III*…. (azaz minden dobás írás)

Események

- Esemény: Ω részhalmaza
- Speciális események:
  - Ω (biztos esemény)
  - ∅ (lehetetlen esemény)
- Az események összessége: $\mathcal{A}$ (halmazrendszer Ω részhalmazaiból)
- Műveletek eseményekkel: szokásos logikai műveletek = halmazműveletek

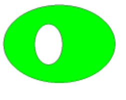
Műveletek eseményekkel

- $A \cup B$: vagy *A* vagy *B* bekövetkezik (az is lehet, hogy mindkettő)



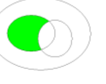
- $A \cap$B: *A* és *B* is bekövetkezik

- *A* esemény ellentettje: $\overline{A}$

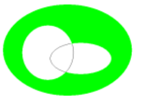


Tulajdonságok

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$



$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
(De Morgan)



$\overline{\overline{A}} = A$ $\quad$ $\overline{\Omega} = \varnothing$

Példák

- Kockadobás:
  - *A*={páros számot dobunk}
  - *B*={legalább 3-ast dobunk}
  - $A \cap B$={4,6}
  - $A \cup B$={2,3,4,5,6}
  - $A \setminus B$={2}
  - $\overline{A}$={1,3,5}

Valószínűség

- Szemléletes megfelelője: *relatív gyakoriság*. Ha *n* egymástól függetlenül, azonos körülmények között végrehajtott kísérletből az adott *A* esemény *k*-szor következett be, akkor a relatív gyakoriság *k*/*n*.
- Nagy *n*-re a relatív gyakoriság egy fix szám körül ingadozik: ezt nevezzük az *A* valószínűségének. Kocka-kísérlet

A valószínűség

- Jele: $P(A)$
- A relatív gyakoriság tulajdonságaiból:
  - Nemnegatív: $P(A) \geq 0$ minden A-ra
  - Egymást kizáró eseményekre, azaz, ha $A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additivitás)
  - $P(\Omega)=1$
- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$: *valószínűségi mező*

Tulajdonságok 1.

- Additivitás n eseményre: ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ páronként kizáró események, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Bizonyítás: indukcióval.

- $P(\emptyset)=0$.

Bizonyítás: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ felbontásból és az additivitásból

Tulajdonságok 2.

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Bizonyítás: $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ felbontásból és az additivitásból

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Bizonyítás: $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$ felbontásból, az additivitásból és az előző tulajdonságból.

Eseménytér

- Nem mindig lehet minden $A \subseteq \Omega$ esemény (pl. nagy – megszámlálhatónál nagyobb – Ω esetén), ezért az $\mathcal{A}$ esemény-rendszer struktúrája: *σ-algebra*.
  1. $\Omega \in \mathcal{A}$
  2. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$ zárt a komplementer-képzés műveletére)
  3. $\mathcal{A}$ zárt a megszámlálható unió műveletére

Példák σ-algebrára

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$
- Ω minden részhalmazából álló halmazrendszer (hatványhalmaz, $\mathcal{P}(\Omega)$)

Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$: *Kolmogorov-féle valószínűségi mező*, ha
  - Ω nemüres halmaz
  - $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak σ-algebrája
  - $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ halmazfüggvény (valószínűség), melyre
  1. $P(\Omega)=1$
  2. σ-additivitás: ha $A_1, A_2, \ldots$, páronként kizáró események, akkor $$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Véges valószínűségi mező

$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$.

Jelölés: $p_i=P(\omega_i)$.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = P(\Omega) = 1$$

az additivitásból.

$$P(A) = P(\cup_{i:\omega_i \in A} \omega_i) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i$$

Azaz a p_i nemnegatív, 1 összegű számok meghatározzák a valószínűséget.

Klasszikus valószínűségi mező 1

$p_i=1/n$ minden i-re (azonos valószínűségűek az elemi események).

Ekkor $P(A)=\dfrac{k}{n}$ ahol k az A elemszáma, n pedig az összes esetszám.

Másképpen: $P(A)$=kedvező esetek száma/összes esetszám.

Klasszikus valószínűségi mező 2

- A klasszikus valószínűségi mező alkalmazása előtt mindig meg kell győződni a feltételekről!
- Példa: születésnap
- Sokáig a valószínűséget általában is így próbálták definiálni, de ez nem fed le minden esetet.

Visszatevéses mintavétel

- N termék, melyből M selejtes
- n elemű minta visszatevéssel
- A: pontosan k selejtes van a mintában

(k=0,…,n)

$$P(A)=\binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

azaz a valószínűség kifejezhető a $p=M/N$ selejtarány segítségével:

$$P(A)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Mintavétel

Visszatevés nélküli mintavétel

- N termék, melyből M selejtes
- n elemű minta visszatevés nélkül
- A: pontosan k selejtes van a mintában

(k=0,…,n)

$$P(A)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Mintavétel

További lehetőségek

- Elektronok energia-szintek közötti megoszlásai, Bose-Einstein statisztika:
- A lehetőségek száma (n részecske, k energia-szint)

$$w(n,k)=\binom{n+k-1}{n}$$

A valószínűség további tulajdonságai

A valószínűség végesen is additív:

ha A_1, A_2 , ..., A_n páronként kizáró események, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Bizonyítás. $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \varnothing$ választással alkalmazzuk a σ-additivitást.

Tehát a korábban belátott tulajdonságok a Kolmogorov-féle valószínűségi mezőre is érvényesek.