Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematikai elemző BSC-seknek

2017/2018 1. félév

8. előadás
november 13.

Abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók várható értéke

- Az előzőekben látott határátmenet segítségével (egyre finomabb felosztással közelítjük a folytonos eloszlást)
  E(X)=ΣzP(z<X<z+δ)≈Σzδf(z) ≈∫zf(z)dz
- Ebből a definíció: az abszolút folytonos eloszlású X várható értéke: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_X(y)dy$
  ha az integrál létezik.

Tulajdonságok, példák

- Mivel a diszkrét esetből határátmenettel kaptuk a fogalmat, a tulajdonságok (pl. E(aX+b)=aE(X)+b, E(X+Y)=E(X)+E(Y) stb.) most is érvényben maradnak.
- Ha X egyenletes eloszlású az [a,b]-ben, akkor

$$E(X)=\int_a^b \frac{y}{b-a}dy=\left[\frac{y^2}{2(b-a)}\right]_a^b=\frac{a+b}{2}$$

További példák

- Ha X exponenciális eloszlású λ paraméterrel, akkor

$$E(X)=\int_0^{\infty}\lambda y e^{-\lambda y}dy=\left[-ye^{-\lambda y}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda y}dy=\frac{1}{\lambda}$$

- Ha X standard normális eloszlású, akkor

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}=0$$

- Ha a Z változó Q_Z eloszlása keverék-eloszlás (azaz pl. p valószínűséggel X-et, 1-p valószínűséggel Y-t figyeljük meg), akkor E(Z)=pE(X)+(1-p)E(Y).

További eloszlások

- Gamma eloszlás, sűrűségfüggvénye a pozitív x értékekre: $\frac{\lambda\,(\lambda\,x)^{h-1}}{(h-1)!}\,e^{-\lambda\,x}.$
  (h∈N, λ>0 paraméterek)
- Lognormális eloszlás, sűrűségfüggvénye

$$f_X(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad x>0$$

- Cauchy eloszlás , sűrűségfüggvénye

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

- Néhány nevezetes eloszlás

Függvény várható értéke

- Legyen X sűrűségfüggvénye f és Y=g(X) (g Borel mérhető). Ekkor $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)f_X(y)dy$
- Bizonyítás az általános esetre a diszkrét valószínűségi változókra vonatkozó állításból határátmenettel. Spec. ha g szigorúan monoton, folytonosan deriválható, g'>0, akkor $f_{g(X)}(z)=\frac{f_X(g^{-1}(z))}{g'(g^{-1}(z))}$

és így

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}zf_Y(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty}z\frac{f_X(g^{-1}(z))}{g'(g^{-1}(z))}dz=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)g'(y)\frac{f_X(g^{-1}(g(y)))}{g'(g^{-1}(g(y)))}dy$$

A szórásnégyzet

- Mivel ez a várható értékből származtatott mennyiség, most is érvényes a $D^2(X):=E[(X-E(X))^2]$ definíció, illetve a $D^2(X)=E(X^2)-E^2(X)$ számítási módszer. A korábban látott tulajdonságok itt is érvényben maradnak.

Példák

- Ha X egyenletes eloszlású az [a,b] intervallumon, akkor

$$E(X^2)=\int_a^b \frac{y^2}{b-a}\,dy=\left[\frac{y^3}{3(b-a)}\right]_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D^2(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(a-b)^2}{12}$$

- Ha X exponenciális eloszlású, akkor

$$E(X^2)=\int_0^\infty y^2\lambda e^{-\lambda y}\,dy=\left[-y^2e^{-\lambda y}\right]_0^\infty+\int_0^\infty 2ye^{-\lambda y}\,dy=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$D^2(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

A normális eloszlás szórásnégyzete

- Legyen X standard normális eloszlású, akkor

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=1$$

parciálisan integrálva. Így $D^2(X)=1$. Ebből az (m,σ) paraméterű normális eloszlás szórásnégyzete: $D^2(\sigma X+m)=\sigma^2$.

Momentumok

- X m-edik momentuma $E(X^m)=\int_{-\infty}^{\infty} y^m f_X(y)\,dy$
- X m-edik centrális momentuma

$$E(X-EX)^m=\int_{-\infty}^{\infty}(y-EX)^m f_X(y)\,dy$$

- Tulajdonság: ha az eloszlás szimmetrikus a 0-ra, akkor a páratlan rendű momentumok – ha léteznek – 0-val egyenlők.
- Következmény: ha az eloszlás szimmetrikus, akkor a páratlan rendű centrális momentumok – ha léteznek – 0-val egyenlők.
- Ha az m-edik momentum véges, akkor a k<m-edik is.

Valószínűségi vektorváltozók

- Emlékeztető: $X=(X_1, X_2,\ldots, X_d)$: $\Omega\to\mathbf{R}^d$ függvény valószínűségi vektorváltozó, ha $\{\omega: X(\omega)\in B\}\in\mathcal{A}$ minden B d-dimenziós Borel halmazra. (Pontosan akkor teljesül, ha X_i valószínűségi változó minden $1\le i\le d$-re.)
- $Q_X(B):=P\{\omega: X(\omega)\in B\}$ az *X eloszlása* $\mathbf{R}^d$ Borel-halmazain.
- Ennek megadásához elegendő a $F_X(z):=P(X<z)$ valószínűségeket megadni ($z\in\mathbf{R}^d$), a < reláció koordinátánként értendő, azaz X<z pontosan akkor teljesül, ha $X_i<z_i$ minden $1\le i\le d$ -re. Ezek meghatározzák $Q_X(B)$ értékét tetszőleges B-re (nem bizonyítjuk).

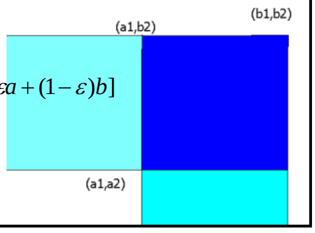
Együttes eloszlásfüggvény

- Az $F_X(z):=P(X<z)$ $\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ függvény az X valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlásfüggvénye.
- Az egydimenziós esettel analóg tulajdonságai:
  - $0\le F_X(z)\le 1$
  - $F_X(z)$ minden koordinátájában monoton növő
  - $\lim F_X(z)=1$, ha z minden koordinátájára $z_i\to\infty$
  - $\lim F_X(z)=0$ ha z legalább egy koordinátájára $z_i\to-\infty$
  - $F_X(z)$ minden koordinátájában balról folytonos.

Téglatestek valószínűségei

- $P(a \le X < b) \ge 0$ minden $a < b \in \boldsymbol{R}^d$ –re. Ez kifejezhető az X eloszlásfüggvényével:
- d=2-re: $P(a \le X < b)=F(b_1,b_2)- F(b_1,a_2)- F(a_1,b_2)+ F(a_1,a_2)$.
- Általánosan:

$$P(a \le X < b) = \sum_{i=0}^{d} \sum_{\substack{\varepsilon\in\{0,1\}^d \\ \sum \varepsilon_j = i}} (-1)^i F[\varepsilon a + (1-\varepsilon) b]$$



ahol

$\varepsilon a=(\varepsilon_1 a_1 , \varepsilon_2 a_2 ,\dots, \varepsilon_d a_d)$

Az eloszlásfüggvény további tulajdonságai

- Tetszőleges, a felsorolt összes tulajdonsággal rendelkező F-hez létezik X d-dimenziós vektorváltozó, aminek F az eloszlásfügvénye.
- Legyen $k = k_1<k_2<,\dots<k_i$ az $\{1,\dots,d\}$ részhalmaza. Ekkor ha $z_j \to\infty$ pontosan az $\{1,\dots,d\}\setminus k$ –beli koordinátákra, akkor $\lim F_X(z)= F_{X^*}(z^*)$ ahol $z^* \in \boldsymbol{R}^i$ pontosan a z k-beli koordinátáiból áll. X* is i-dimenziós valószínűségi változó, elnevezés: az X peremeloszlása.
- Spec.: d=2, i=1: $\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y)=F_Y(y)$
  $\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)$

Sűrűségfüggvény

- Ha létezik $f: \boldsymbol{R}^d \to \boldsymbol{R}$ függvény, hogy F előáll f integrálfüggvényeként:
  $$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)dt$$
  akkor azt mondjuk, hogy F abszolút folytonos, f sűrűségfüggvénnyel. Az integrál most d-dimenziós, értelmezése:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z_1} \int_{-\infty}^{z_2} \dots \int_{-\infty}^{z_d} f(t_1,t_2,\dots,t_d)dt_d \dots dt_2 dt_1$$

A peremeloszlások sűrűségfüggvénye

- Legyen d=2. Ha (X,Y) abszolút folytonos, f(x,y) együttes sűrűségfüggvénnyel, akkor X sűrűségfüggvénye
  $$g_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$
- Bizonyítás.
  $$\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx = F_{X,Y}(z,\infty) = P(X<z)$$
- Ugyanígy Y sűrűségfüggvénye
  $$h_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

Példák, megjegyzések

- Az egységnégyzeten egyenletes eloszlásra a peremeloszlások is egyenletesek a [0,1] intervallumon.
- Tetszőleges (mérhető) T tartományra a P(X∈T) valószínűség az f együttes sűrűségfüggvény T tartományon vett integráljaként számolható.
- Következmény: nem abszolút folytonos az az (X,Y) vektorváltozó, amelynél 0 területű tartomány valószínűsége pozitív.

Valószínűségi változók függetlensége (ismétlés)

- *n* eseményrendszer független, ha
  $$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots . A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})$$

teljesül tetszőleges

$$A_{i_1} \in \mathcal{A}_{i_1}, A_{i_2} \in \mathcal{A}_{i_2}, \dots, A_{i_k} \in \mathcal{A}_{i_k}$$

eseményekre, $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ indexsorozatra és minden $2 \le k \le n$ számra.

Def. Az $X_1,\dots,X_n$ valószínűségi változók függetlenek, ha az előző tulajdonság teljesül

$$A_{i_j} = \{\omega : X_{i_j}(\omega) \in B_{i_j}\}$$

választással (ez matematikailag azt jelenti, hogy az $\mathcal{F}_{X1}$, $\mathcal{F}_{X2}$, …, $\mathcal{F}_{Xn}$ generált σ-algebrák függetlenek).

A függetlenség karakterizációi

- Ha $\underline{X}$ koordinátái függetlenek, akkor definíció szerint
- $F_{\underline{X}}(\underline{z})=P(X_1<z_1, X_2< z_2,\ldots, X_d<z_d)=F_1(z_1)F_2(z_2)\ldots F_d(z_d)$ (minden $\underline{z} \in \boldsymbol{R}^d$ –re). Meg is fordítható: F szorzatelőállításából következik a függetlenség.
- Deriválva: a függetlenség abszolút folytonos változókra ekvivalens a sűrűségfüggvény $f_{\underline{X}}(\underline{z})=f_1(z_1)f_2(z_2)\ldots f_d(z_d)$ alakú előállításával is.
- Példa: az egységnégyzeten egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye ($f(\underline{z})=1$ ha $0<\underline{z}<1$) előáll $f_1(z_1)f_2(z_2)$ alakban, ahol $f_i(z_i)=1$, ha $0<z_i<1$ $(i=1,2)$, ez éppen a [0,1] intervallumon egyenletes eloszlás.

Tulajdonságok

- 1. Az $X_1,\ldots,X_n$ diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha $P(X_1 = x_1,\ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)\cdot\ldots\cdot P(X_n = x_n)$ teljesül minden $x_1,\ldots,x_n$ értékre.
- 2. Ha az $X_1,\ldots,X_n$ valószínűségi változók függetlenek, a $g_1,\ldots,g_n$ függvények Borel-mérhetőek, akkor $g_1(X_1),\ldots, g_n(X_n)$ is függetlenek.
- 3. Ha az $X_1,\ldots,X_n$ valószínűségi változók függetlenek, a h k-változós Borel-mérhető fv., akkor $h(X_1,\ldots, X_k)$, $X_{k+1},\ldots,X_n$ is függetlenek.

Függvény eloszlása

- Tfh. az A tartományon adott egy g, folytonosan deriválható függvény, melynek létezik inverze. Ha az $\underline{X}$ abszolút folytonos változó értékei A-beliek, akkor $g(\underline{X})$ is abszolút folytonos, sűrűségfüggvénye

$$f_{g(X)}(\underline{y}) = f_X(g^{-1}(\underline{y}))\,|\,J\,|$$

ahol J a g^{-1} függvény Jacobi determinánsának abszolút értéke.

Példák

- Számoljuk ki (X+Y,X-Y) együttes sűrűségfüggvényét, ha X,Y független, standard normálisok!
- Adódik, hogy az összeg (és a különbség is) normális eloszlású!
- X+Y és X-Y független is (ez csak a normális eloszlásra igaz).

Markov-típusú egyenlőtlenségek

- Legyen $X\geq 0$ valószínűségi változó, g: $\boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ monoton növő. Ekkor

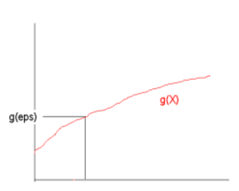
$$P(X \geq \varepsilon)\leq E(g(X))/g(\varepsilon).$$

- Bizonyítás.

$E(g(X)) \geq g(\varepsilon)P(X \geq\varepsilon)$

mert $X \geq\varepsilon$ eseményen

$g(X)) \geq g(\varepsilon)$



Alkalmazások

- $g(x)=x$: Ha $X\geq 0$ valószínűségi változó, akkor $P(X \geq\varepsilon)\leq E(X)/\varepsilon$ (ezt nevezik Markov egyenlőtlenségnek).
- $g(x)=x$, X helyett $(X-EX)^2$-re alkalmazva: $P((X-EX)^2 \geq \varepsilon^2)\leq E(X-EX)^2/\varepsilon^2$, ami egyszerűsítve $P(|X-EX| \geq \varepsilon)\leq D^2(X)/\varepsilon^2$ (elnevezés:Csebisev egyenlőtlenség).
- Megjegyzés. A fenti egyenlőtlenségek élesek, azaz minden ε-ra megadható olyan valószínűségi változó, amelyre $P(X \geq\varepsilon)=E(X)/\varepsilon$. (Két értéket vesz fel: 0, ε).