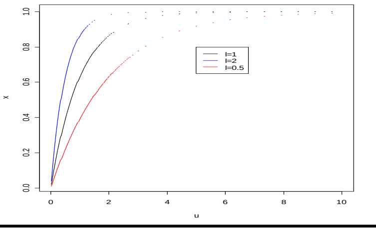
Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematikai elemző BSC-seknek

2017/2018 1. félév

7. előadás

Exponenciális eloszlás

$$F(z)=\begin{cases} 0, \text{ha } z \le 0 \\ 1-e^{-\lambda z}, \text{ha } 0 < z \end{cases}$$ ahol $\lambda>0$ paraméter



Valószínűségek kiszámítása

- $P(a \le X < b)=F(b)-F(a)$
- $P(a<X<b)=F(b)-F(a+0)$
- $P(a \le X \le b)=F(b+0)-F(a)$
- $P(X=a)= F(a+0)-F(a)$, azaz ha F folytonos, minden egyes pont 0 valószínűségű.

Abszolút folytonos eloszlások

- Ha létezik f, hogy F előáll f integrálfüggvényeként:

$$F(z)=\int_{-\infty}^{z} f(t)dt$$

akkor azt mondjuk, hogy F abszolút folytonos, f ***sűrűségfüggvénnyel***.

- f tulajdonságai: $f \ge 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=1$$

- Ez elég is: minden ilyen f integrálfüggvénye eloszlásfüggvény.

Példák

- Egyenletes eloszlás [a,b] intervallumon

$$f(z)=\begin{cases} 0, \text{ha } z \le a \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ha } a < z \le b \\ 0, \text{ha } z > b \end{cases}$$

- Exponenciális eloszlás

$$f(t)=\begin{cases} 0, \text{ha } t \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, \text{ha } 0 < t \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény tulajdonságai

- Létezéséhez szükséges, hogy F folytonos legyen.
- Ha F abszolút folytonos, akor F′=f, ahol F deriválható.
- f nem egyértelmű (pl. véges sok pontban tetszőleges értéket adhatunk neki), ezért a legegyszerűbb, szakaszonként folytonos változatot választjuk.
- Szemléletes jelentése:

$$P(a < X < b)=\int_{a}^{b} f(t)dt \approx f(a)(b-a)$$

azaz rövid intervallumokra a valószínűség közelíthető a sűrűségfüggvény értékének és az intervallum hosszának a szorzatával.

Szemléletes bevezetés

- Ha úgy közelítjük az abszolút folytonos eloszlást (pl. az év egy adott napján 12 órakor Bp-en a hőmérséklet), hogy egyre pontosabb eszközökkel mérjük meg, akkor $P(z<X<z+\delta)/\delta \approx f(z)$, azaz a valószínűségekből határátmenettel adódik a sűrűségfüggvény.

Standard normális eloszlás

- A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- Valóban sűrűségfüggvény, mert f>0 és

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})}dxdy=$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}re^{-\frac{r^2}{2}}d\varphi dr=\int_0^{\infty}re^{-\frac{r^2}{2}}dr=\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty}=1$$

a polárkoordinátás helyettesítésből

g(X) eloszlása

- Legyen g: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ (mérhető) függvény. Ekkor g(X) is valószínűségi változó.
- Abból, hogy X eloszlása abszolút folytonos, nem következik még g(X) eloszlásának folytonossága sem: pl. g(x)=c esetén g(X) elfajult eloszlású.

Példák

$F_{aX+b}(z) = F_X((z-b)/a)$, ha a>0 és
$F_{aX+b}(z) = 1-F_X((z-b)/a)$, ha a<0.
Ebből adódik, hogy ha X abszolút folytonos, és g(z)=az+b, akkor g(X) sűrűségfüggvénye
$f_{aX+b}(z)=f_X((z-b)/a)/|a|$.
Általános eredmény: ha g szigorúan monoton, folytonosan deriválható, $g'\neq 0$, akkor

$$f_{g(X)}(z)=\frac{f_X(g^{-1}(z))}{|g'(g^{-1}(z))|}$$

A normális eloszlás

- Legyen m tetszőleges, σ pedig pozitív valós szám. Ha X standard normális eloszlású, akkor az $Y=\sigma X+m$ valószínűségi változó (m,σ) paraméterű normális eloszlású. Ennek sűrűségfüggvénye az $f_{aX+b}(z)=f_X((z-b)/a)/|a|$ képletből

$$f_{m,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Normális eloszlások sűrűségfüggvénye (m=0)