Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematikai elemző BSC-seknek

2017/2018 1. félév

6. előadás

Összeg szórásnégyzete

- $D^2(X+Y)=E[(X+Y-E(X+Y))^2]=$
  $E[(X-E(X)+Y-E(Y))^2]=E[(X-E(X))^2]+E[(Y-E(Y))^2]+$
  $+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=D^2(X)+D^2(Y)+$
  $+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$
- Példák:
  - X=Y esetén $D^2(X+Y)= D^2(2X)=4\, D^2(X)$
  - X=-Y esetén $D^2(X+Y)= D^2(0)=0$

azaz nem csak X és Y egydimenziós eloszlásától, hanem az együttes viselkedésüktől, azaz az együttes eloszlásuktól is függ az összegük szórásnégyzete.

A független val. változók esete

- *Állítás.* ha X,Y függetlenek, akkor E(XY)=E(X)E(Y).
- *Bizonyítás.*

$$E(XY)=\sum_{k,m} x_k y_m P(X=x_k, Y=y_m)$$

ami a függetlenség miatt így írható:

$$=\sum_k x_k P(X=x_k)\sum_m y_m P(Y=y_m)=E(X)E(Y).$$

Kovariancia

- Definíció. Az X és Y kovarianciája:

cov(X,Y):=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]

- Kiszámítása: cov(X,Y)= E[XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)]=E(XY)-E(X)E(Y)
- Az előzőek értelmében cov(X,Y)=0, ha X és Y függetlenek.
- Megj.: Abból, hogy cov(X,Y)=0 nem következik, hogy függetlenek: legyen X szimmetrikus a 0=ra (pl. P(X=1)=P(X=-1)=P(X=0)=1/3) és $Y=X^2$. Ekkor $cov(X,Y)=E(X^3)-E(X)E(X^2)=0-0$, hiszen $E(X^3)=E(X)=0$.
- A kovariancia szimmetrikus: cov(X,Y)= cov(Y,X)
- $cov(X,X)= D^2(X)$

Összeg szórásnégyzete 2

- $D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)+2cov(X,Y)$
- Speciálisan: $D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)$, ha X és Y függetlenek (elég, hogy cov(X,Y)=0).
- n tagú összegre:

$$D^2(X_1+\ldots+X_n)=\sum_{i=1}^{n} D^2(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)$$

- Spec.: $D^2(X_1+X_2+\ldots+X_n)= D^2(X_1)+D^2(X_2)+\ldots+D^2(X_n)$, ha a tagok páronként függetlenek.

A szórás

- Szórásnégyzet mértékegysége az eredeti X mértékegységének a négyzete (azaz pl. a buszok követési időközénél négyzetperc). Ez nem teszi egyszerűvé interpretációját.
- Szórás: D(X) a szórásnégyzet pozitív négyzetgyöke. Ez már a megfelelő mértékegységű, $D(aX)=|a|D(X)$.

Korrelációs együttható

- A kovariancia skálafüggő: cov(*a*X,*b*Y)=*ab*·cov(X,Y)
- A változók közötti lineáris kapcsolat erősségét mérő mennyiség a *korrelációs együttható*:

$$R(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)}$$

- Tulajdonságai:
  - R(X,Y)=0, ha X és Y függetlenek (ez sem fordítható meg)
  - Ez alapján definíció szerint legyen R(X,Y)=0, ha X vagy Y elfajult eloszlású.
  - R(X,aX+b)=1, ha a>0, mert cov(X,aX+b)=aD^2(X).

A korreláció tulajdonságai

- |R(X,Y)|≤1 és |R|=1 akkor és csak akkor, ha X=aY+b 1 valószínűséggel (a≠0, b∈***R***).
- Ehhez:

$$X^*=\frac{X-E(X)}{D(X)},Y^*=\frac{Y-E(Y)}{D(Y)}$$

a standardizált változók. E(X*)=E(Y*)=0, D(X*)=D(Y*)=1. R(X,Y)=E(X*Y*).

0≤E $(X^*\pm Y^*)^2=E(X^{*2})\pm 2E(X^*Y^*)+E(Y^{*2})=2\pm 2E(X^*Y^*)$, tehát |R(X,Y)|≤1.

Ebből: R=1 akkor és csak akkor, ha 0=E $(X^*-Y^*)^2$, azaz X*=Y* 1 valószínűséggel. Ekkor X=aY+b , a>0.

R=-1 akkor és csak akkor, ha 0=E $(X^*+Y^*)^2$, azaz

X*=-Y* 1 valószínűséggel. Ekkor X=aY+b , a<0.

Példák

- A polinomiális eloszlás koordinátái közötti korreláció: n=1-re. (Állítás: ez ugyanaz minden n-re.)
- $E(X_1)=p_1$, $E(X_2)=p_2$, $E(X_1 X_2)=0$,
- $D^2(X_1)=p_1(1-p_1)$, $D^2(X_2)=p_2(1-p_2)$. Ebből

$$R(X_1,X_2)=\frac{E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)}{D(X_1)D(X_2)}=\frac{-p_1p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)}}$$

- Spec.: $p:=p_1=p_2$, esetén R=- p/(1-p).

Y közelítése X függvényével

- Gyakori eset, hogy nem ismerjük a számunkra érdekes mennyiség (Y) pontos értékét (pl. holnapi részvény-árfolyam, vízállás, időjárás). Van viszont információnk hozzá kapcsolódó mennyiségről (X, mai értékek).
- Feladat: olyan f_0 megtalálása, amelyre $f_0(X)$ a lehető legjobb közelítése Y-nak.
- Matematikailag: f_0 a megoldása a $\min_f E(Y-f(X))^2$

  szélsőérték-problémának (legkisebb négyzetes becslés).
- Ha az együttes eloszlás ismert (nem teljesen reális, de a megfigyelések alapján közelíthető), akkor megoldható a feladat.

A várható érték optimumtulajdonsága

Állítás. A $\min_a E(Y-a)^2$ feladat megoldása a=E(Y).

Bizonyítás. $E(Y-a)^2=E(Y^2)-2aE(Y)+a^2$

a szerint deriválva adódik, hogy valóban E(Y) a minimumhely.

A minimum értéke $D^2(Y)$.

Ugyanígy: X tetszőleges értéke esetén E(Y|X=x) adja a minimumot.

Példa

- Annyi érmével dobtunk újra, amennyi fejet kaptunk 2 érmével dobva. Csak azt tudjuk, hogy hány fejet kaptunk a második dobásnál. Közelítsük ennek segítségével az első dobás eredményét.
- Például F=0 esetre:

$$E(X\mid F=0)=\frac{\sum_{i=0}^{2} iP(X=i,F=0)}{P(F=0)}=\frac{\sum_{i=0}^{2} iP(F=0\mid X=i)P(X=i)}{\sum_{i=0}^{2} P(F=0\mid X=i)P(X=i)}$$

- Az eredmények: E(X|F=2)=2, E(X|F=1)=4/3, E(X|F=0)=2/3.

Optimum a lineáris függvények körében

$$\min_{a,b} E[Y-(aX+b)]^2$$

- Egyszerűbben megoldható
- Nem kell az együttes eloszlás
- A megoldás deriválással:

$$E[Y-(aX+b)]^2 = E(Y^2)+a^2E(X^2)+2abE(X)+$$
$$+b^2-2aE(XY)-2bE(Y)$$

$$\frac{\partial}{\partial a}E[Y-(aX+b)]^2 = 2aE(X^2)+2bE(X)-2E(XY)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial b}E[Y-(aX+b)]^2 = 2b+2aE(X)-2E(Y)=0$$

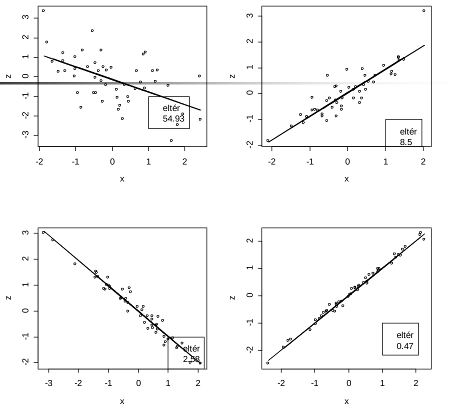
$$aE(X^2)=E(XY)-bE(X) \qquad b=E(Y)-aE(X)$$

$$aE(X^2)=E(XY)-(E(Y)-aE(X))E(X)$$

$$a=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{E(X^2)-E^2(X)} \qquad b=E(Y)-\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{E(X^2)-E^2(X)}E(X)$$

Az aX+b egyenes tulajdonságai

- Ez a legkisebb négyzetes eltérést adó a lineáris függvények között (a fenti megoldás valóban minimum)
- Elnevezés: regressziós egyenes
- Átmegy az (E(X),E(Y)) ponton
- Példa: Kockával dobunk, majd ha *k* az eredmény, az 1,…,*k* cédulák közül húzunk egyet. Nem tudjuk a húzás eredményét, csak a kockadobását. Hogyan tippeljünk a húzott számra (a legkisebb négyzetes eltérést adó becslést keressük)? E(h|K=k)=(k+1)/2 az univerzálisan legjobb közelítés, tehát a legjobb lineáris közelítés is.



Konvolúció

- Független valószínűségi változók összegének eloszlása
- Most: nemnegatív, egész értékű esetre.

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

- Példák: X, Y függetlenek, binomiális eloszlásúak (n,p), ill. (m,p) paraméterekkel. Ekkor

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i}=$$
$$=p^k(1-p)^{n+m-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=p^k(1-p)^{n+m-k}\binom{n+m}{k}$$

Példák

- Azaz X+Y is binomiális (n+m,p) paraméterekkel. Spec.: X= X_1+ X_2+… +X_n, ahol X_i p paraméterű indikátorváltozó, a tagok függetlenek is. Ebből is kijön, hogy E(X)=np, D^2(X)=np(1-p).
- Példa 2: X, Y függetlenek, Poisson eloszlásúak λ, ill. μ paraméterekkel. Ekkor X+Y is Poisson, $\lambda+\mu$ paraméterrel.

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}\frac{\mu^{k-i}e^{-\mu}}{(k-i)!}=\frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i}{i!}\frac{\mu^{k-i}k!}{(k-i)!}=\frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!}(\mu+\lambda)^k$$

Negatív binomiális eloszlás

- Legyen $X= X_1+ X_2+\dots +X_r$, ahol X_i p paraméterű Pascal eloszlású változó, függetlenek. Ekkor X eloszlása:

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$$

ha $k\geq r$ (különben 0). Elnevezés: r-ed rendű, p paraméterű negatív binomiális eloszlás. Ez éppen annak a kísérletnek a sorszáma, ahol az r-edik sikeres jön ki. Ez bizonyítja is a képlet helyességét (formálisan is meg lehet kapni a konvolúciós képletből indukcióval).

A negatív binomiális eloszlás

Valószínűségi változók általános fogalma (ismétlés)

- $X:\Omega\to\boldsymbol{R}$ függvény valószínűségi változó, ha $\{\omega: X(\omega)\in B\}\in\mathcal{A}$ minden B Borel halmazra.
- $Q_X(B):=P\{\omega: X(\omega)\in B\}$ az X *eloszlása*.
- Ennek megadásához elegendő a félegyenesek valószínűségeit megadni: $F_X(z):=P(X<z)$ meghatározza $Q_X(B)$ értékét tetszőleges B-re (nem bizonyítjuk).

Az eloszlásfüggvény

- Az $F_X(z)$: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ függvény az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.
- Tulajdonságai:
  - $0\leq F_X(z)\leq 1$
  - $F_X(z)$ monoton növő
  - $\lim_{z\to\infty} F_X(z)=1$, $\lim_{z\to-\infty} F_X(z)=0$
  - $F_X(z)$ balról folytonos.
- Bizonyítás: Az első kettő triviális, az utolsó kettőhöz a valószínűség folytonossága kell:
  Ha $A_1\supseteq A_2\supseteq\dots$ akkor $\lim_{n\to\infty} P(A_n)=P(A)$
  ahol $A={}_{i=1}^{\infty}A_i$

Bizonyítás

- Az A_n= $(-\infty,-n)$ választással alkalmazva a folytonosságot a Q_X valószínűségre adódik a 3. tulajdonság második fele.
- A folytonosságot a komplementerekre alkalmazva kapjuk, hogy ha $A_1\subseteq A_2\subseteq\dots$ és
  $A={}_{i=1}^{\infty}A_i$ akkor $\lim_{n\to\infty} P(A_n)=P(A)$ amit
  A_n= $(-\infty,n)$ választással alkalmazva éppen a 3. tulajdonság első felét kapjuk.
- Végül a 4. tulajdonsághoz A_n= $(-\infty,x-1/n)$ a jó választás, ekkor A= $(-\infty,x)$.

Példák

- Tetszőleges 1-4 tulajdonságú F-hez létezik X, aminek F az eloszlásfügvénye (pl. $\Omega=\boldsymbol{R}$, $P([a,b))=F(b)-F(a)$, X az identitásfügvény
- A c pontban elfajult eloszlás eloszlásfüggvénye
$$F(z)=\begin{cases}0,\text{ha } z\leq c\\ 1,\text{ha } z>c\end{cases}$$
- Az indikátorváltozó eloszlásfüggvénye
$$F(z)=\begin{cases}0,\text{ha } z\leq 0\\ 1-p,\text{ha } 0<z\leq 1\\ 1,\text{ha } z>1\end{cases}$$

Folytonos eloszlások

- Definíció. X folytonos eloszlású, ha eloszlásfüggvénye folytonos.
- Példa: egyenletes eloszlás [a,b] intervallumon:

$$F(z)=\begin{cases}0,\text{ha } z\leq a\\ \dfrac{z-a}{b-a},\text{ha } a<z\leq b\\ 1,\text{ha } z>b\end{cases}$$