Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakososknak és matematikai elemző BSC-seknek

2017/2018 1. félév

4. előadás

Példák

- Függetlenek
  - Visszatevéses mintavételnél az egyes kísérletek eredményei
    - egymás utáni kockadobások
- Nem függetlenek
  - Visszatevés nélküli mintavételnél az egyes kísérletek eredményei
    - lottóhúzásnál az egymás utáni számok
- Kérdés: Két kockadobás összege független-e ugyanezen két dobás különbségétől?

Függetlenek-e?

- A napi középhőmérséklet Budapesten az idén szeptember 30-án és jövőre ilyenkor
- A sajtóhibák száma egy könyv két különböző oldalán
- Két háztartás áramfogyasztása ugyanazon a napon
- Két beteg vérnyomása
- Egy beteg vérnyomása két különböző vizsgálatnál

Binomiális eloszlás alkalmazása

- Visszatevéses mintavétel más realizációja: független kísérletek azonos körülmények között. $P(A)=p$ esemény, végezzünk n (rögzített számú) független kísérletet.
- X: az A bekövetkezésének gyakorisága (pontosan hányszor jött ki az A). X eloszlása binomiális (n,p).
- $X= X_1 + X_2 \ldots + X_n$ ahol X_i az i-edik kísérletnél az A esemény indikátora. Ezek az indikátorok függetlenek is!

Geometriai (Pascal) eloszlás

- Független kísérletek azonos körülmények között. $P(A)=p$ esemény, addig végzünk kísérletet, míg A be nem következik.
- X: az első sikeres kísérlet sorszáma.

$p_k=P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ $(k=1,2,\ldots)$

Valóban valószínűségeloszlás $(p_1+p_2+\ldots=1)$

geometriai eloszlás

Poisson eloszlás

$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $(k=0,1,2,\ldots;\ \lambda>0$ paraméter). Valóban eloszlás. Grafikusan

Állítás. Ha a binomiális eloszlás paramétereire $n\to\infty$ úgy, hogy $np\to\lambda$, akkor a határérték éppen a λ paraméterű Poisson eloszlás.

Bizonyítás. $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx\binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\to\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Alkalmazások

- Első példa: lórugás áldozatainak száma a porosz hadseregben.
- Poisson folyamat: időben lejátszódó folyamatnál adott $[a,b)$ intervallumba eső események száma ($X_{a,b}$) éppen $\lambda(b-a)$ paraméterű Poisson eloszlású, ha a folyamat
  - homogén: $X_{a,a+t}$ eloszlása csak t-től függ;
  - utóhatás nélküli: $X_{a,b}$ és $X_{b,c}$ függetlenek ha $a<b<c$;
  - nemelfajuló: $0<P(X_{a,b}=0)<1$.

Bizonyítás-vázlat

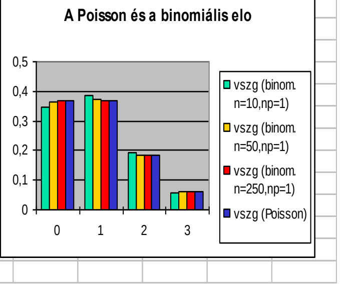
- Legyen $p_t := P(X_{0,t}=0)$. A homogenitás és a függetlenség miatt $p_1 = p_{1/n}^n$ illetve
  $$p_t = p_1^t = e^{-\lambda t}$$
- Annak a valószínűsége, hogy egy t hosszúságú intervallumon pontosan k esemény következik be, közelíthető a $\binom{n}{k}(1-e^{-\lambda t/n})^k e^{-\lambda t(n-k)/n}$

  kifejezéssel, ami az előzőek és
  $$n(1-e^{-\lambda t/n}) \to \lambda t$$

miatt éppen a $\lambda(b-a)$ paraméterű Poisson eloszlásnál a $P(X=k)$ valószínűség.

A konvergencia a gyakorlatban

vszg (binom. n=250,np=1	0,367142	0,368617	0,184308	0,061189
vszg (Poisson)				



Gyakorlati alkalmazások

- Balesetek száma
- Viharok száma
- Rendszer meghibásodásainak száma

Tulajdonság: ha kétféle esemény következhet be a folyamat során, akkor külön-külön az egyes események száma is Poisson folyamatot alkot.

Összefoglalás (diszkrét eloszlások)

- Binomiális eloszlás
  - Rögzített számú kísérletnél adott esemény gyakorisága (pl. 10 kockadobásból a hatosok száma)
  - Nagy mintaelemszámra, kicsi valószínűségnél a Poisson eloszlással közelíthető
- Pascal eloszlás
  - Addig kísérletezünk, míg egy adott esemény be nem következik, az első sikeres sorszáma (pl. az első hatost hányadik kockadobásnál kapjuk meg)
- Hipergeometriai eloszlás
  - Visszatevés nélküli mintavételnél adott típusú mintaelemek száma (pl. lottóhúzásnál az 5 találat valószínűsége)

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

- Szerencsejátékban a pontos nyeremény nem látható előre. De: az átlagos nyereményről szeretnénk tudni. (Kedvező-e a játék? Fair játék: az ár éppen a várható érték.)
- Példa: Dobókocka: annyi a nyereményünk, amennyit dobunk. Ennek átlagos értéke 1/6(1+2+…+6)=21/6=3.5
- De ha nem szabályos a kocka, például az egyes helyett is 6 van, akkor az átlagos nyeremény 1/6(2+…+5)+6/3=13/3.
- *Definíció.* A $p_i=P(X=x_i)$ eloszlással megadott valószínűségi változó *várható értéke* $E(X):= p_1x_1+ p_2x_2 +\ldots$, ha a sor abszolút konvergens.

Példák

- Az elfajult eloszlás várható értéke:
$E(X)=cP(X=c)=c$.
- A p valószínűségű A esemény indikátorának várható értéke: $E(X)=1P(X=1)=p$
- *Az* $x_1, x_2, \ldots x_n$ számokon egyenletes eloszlás (mindegyik valószínűsége 1/n) várható értéke a számok számtani közepe.
- Az (n,p) paraméterű binomiális eloszlás várható értéke:

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} np\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np$$

- Amerikai rulett. Ha k számra teszünk, a nyereményünk 36/k. A várható nettó nyeremény (36/k)· (k/38)-1= - 2/38.

Példák 2.

A hipergeometriai eloszlás várható értéke

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} k\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\sum_{k=1}^{n} n\frac{M}{N}\frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-(k-1)}}{\binom{N-1}{n-1}}=n\frac{M}{N}$$

A Poisson eloszlás várható értéke

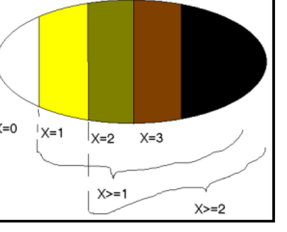
$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda^k\frac{e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\frac{e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}\frac{e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda$$

Tulajdonságok

- Nem minden valószínűségi változónak van véges várható értéke:
  $P(X=2^k)=(1/2)^k \quad k=1,2,\ldots$
  esetén $E(X)=1+1+1+\ldots=\infty$.
- Azaz annak a játéknak az „ára", ahol 2^k Ft-ot kapunk, ha szabályos érmével k-adikra dobunk először fejet: végtelen. Ez a Szt.Pétervári paradoxon; gyakorlatban persze nem reális így ez a játék, hiszen nincs az a bank, amely korlátlan pénzt tudna fizetni.
- Ha $E(X)$ véges, akkor az abszolút konvergencia miatt egyértelmű is.

Tulajdonságok 2.

- Ha $X\geq0$ és $E(X)$ véges, akkor $E(X)\geq0$.
- Ha $E(X)$ véges, akkor $E(aX+b)=aE(X)+b$ (a várható érték lineáris).
- Ha X nemnegatív egész értékű, akkor $E(X)=P(X\geq1)+P(X\geq2)+\ldots$



Alkalmazás: a Pascal eloszlás várható értéke

- $P(X\geq k)=(1-p)^{k-1}$, így
- $E(X)=1+(1-p)+(1-p)^2+\ldots=1/p$.
- Természetes eredmény: átlagosan a hatodik dobásra kapjuk az első hatost.
- Tulajdonság: a Pascal eloszlás örökifjú

$$P(X>k+l\,|\,X>l)=P(X>k)$$

(k,l tetszőleges természetes számok).

Függvény várható értéke

- Legyen g: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény, X diszkrét valószínűségi változó, $p_i=P(X=x_i)$. Ekkor g(X) is valószínűségi változó, a várható értéke E(g(X)) az eredeti X változó eloszlásából is kiszámolható:
  $E(g(X))=p_1 g(x_1)+p_2 g(x_2)+$

Bizonyítás. A definíció szerint $E(g(X))=q_1y_1+q_2y_2+\ldots$ ahol $q_i=P(g(X)=y_i)$. $y_i=g(x_j)$ valamely j-re, így az X változóhoz tartozó teljes eseményrendszer elemei szerint összegezhetünk és így éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.