Valószínűségszámítás

3. előadás

2017.09.25.

Események függetlensége

- Ha a B esemény bekövetkezése nem befolyásolja az A valószínűségét, azaz $P(A|B)=P(A)$, akkor azt mondjuk, hogy az A és B függetlenek. Ez így nem ideális definíció (nem szimmetrikus, $P(B)>0$ kell hozzá), ezért
- Definíció. Az A és B *események függetlenek*, ha $P(A \cap B)=P(A)P(B)$.

Példák

- Húzunk egy lapot egy magyarkártya-csomagból. A: piros B: ász.

$P(A)=1/4$, $P(B)=1/8$, $P(A \cap B)=1/32$, tehát függetlenek.

- A függetlenség nagyon ritka azonos kísérletből meghatározott eseményeknél!
- Tipikus eset függetlenségre: A az első, B a második kísérlet eredménye.

Tulajdonságok

- Ha A és B diszjunktak, akkor csak triviális ($P(A)=0$ vagy $P(B)=0$) esetben függetlenek.
- Ha A és B függetlenek, akkor komplementereik is függetlenek.
- Önmaguktól csak a triviális események függetlenek.
- $A \subset B$ esetén csak akkor függetlenek, ha legalább az egyik triviális.

Független kísérletek

- $A \in (\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ az egyik kísérlethez kapcsolódik,
- $B \in (\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ pedig a másik kísérlethez kapcsolódik.
- Függetlenségük értelmezéséhez kell a valószínűségi mezők szorzata:

$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, P_1 \times P_2)$ ami szintén valószínűségi mező. $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ elemei az $A \times B$ alakú események ($A \in \mathcal{A}_1$ megfelelője az $A \times \Omega_2$, így már értelmezhető $A \cap B = A \times B$).

$P_1 \times P_2 (A \times B) = P_1(A)P_2(B)$, ami éppen a függetlenséget jelenti.

Véges esetben $|\Omega_1|=n$, $|\Omega_2|=m$ mellett $|\Omega_1 \times \Omega_2|=nm$, amit már sokszor használtunk is.

Általánosítás

- Két eseményrendszer független, ha az első tetszőleges eleme független a második tetszőleges elemétől.
- n esemény független, ha

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots . A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

teljesül tetszőleges $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ indexsorozatra és minden $2 \le k \le n$ számra.

Megjegyzések

- Nem elég a fenti szorzat-tulajdonságot k=2-re megkövetelni. Ha csak ez teljesül: páronkénti függetlenségről beszélünk.
- A szorzat-előállítás segítségével n független kísérlethez tartozó valószínűségi mező is értelmezhető. Ha A_i az i-edik kísérlethez tartozik, akkor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ független. (A gyakorlatban ez a tipikus, fontos előfordulása ennek a függetlenségnek.)

További általánosítás

- Végtelen sok eseményt függetlennek nevezünk, ha tetszőlegesen kiválasztva közülük véges sokat, független eseményeket kapunk.
- A szorzat-előállítás segítségével végtelen sok független kísérlethez tartozó valószínűségi mező is értelmezhető. Ha A_i az i-edik kísérlethez tartozik, akkor $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ független.

Valószínűségi változók 1.

- A legtöbbször nem maga a kísérlet kimenetele (a realizálódott elemi esemény) hanem egy számszerűsíthető eredmény az érdekes.
- Példa: ipari termelés – minőségellenőrzés: a kérdés az esetleges selejtesek száma, nem pedig az, hogy pontosan melyik elemeket is választottuk.
- Sok gyakorlati esetben nem is adódik természetesen az Ω halmaz (pl. időjárás megfigyelés).

Valószínűségi változók 2.

- Mintavételi példa (folytatás). N termék, n elemű minta. Ω elemszáma: $\binom{N}{n}$
- Selejtesek száma (X): 0 és n közötti szám.
- Matematikailag: $X : \Omega \to \boldsymbol{R}$ függvény
- Feltétel: legyen értelme pl. annak a valószínűségéről beszélni, hogy $X<a$. Azaz $\{\omega: X(\omega)<a\} \in \mathcal{A}$ kell, hogy teljesüljön minden a-ra. Hasonlóképpen más „természetes" feltételnek is legyen valószínűsége.

Borel halmazok

A feltétel precíz felírásához:

Definíció. A valós számegyenes Borel halmazai : az a legszűkebb σ-algebra, amely tartalmazza a félegyeneseket (intervallumokat, nyílt halmazokat...). Gyakorlatilag: minden olyan halmaz, amit legfeljebb megszámlálhatóan sok halmazművelettel az intervallumokból elő tudunk állítani.

- Jelölés : $\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$.

Valószínűségi változók 3.

- Precíz definíció: $X : \Omega \to \boldsymbol{R}$ függvény valószínűségi változó, ha $\{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden B Borel halmazra.
- Ha $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, akkor minden $\Omega \to \boldsymbol{R}$ függvény valószínűségi változó.
- A feltételek a gyakorlatban:
  - egyértelmű az X értéke az ω-kon (azaz ha csak a színvakságot ellenőrizzük, Ω={színvak, egészséges}, akkor a beteg nemét nem tudjuk, a *nem* kódja tehát ennél az eseménytérnél nem valószínűségi változó).
  - Ha többfajta színvakság is elképzelhető, de ezek valószínűségére nem is vagyunk kíváncsiak, akkor ugyan Ω={színvak_1, színvak_2, egészséges}, de $\mathcal{A}$={∅,színvak, egészséges, Ω} és így az az X, ami a színvakság típusát is kódolja, nem valószínűségi változó.

Példák

- Kockadobás:
  - X a dobott szám. $\Omega=\{1,2,\ldots,6\}$, $X(i)=i$. Értékkészlete: $\{1,2,\ldots,6\}$.
  - X az első olyan dobás sorszáma, amikor 6 jön ki. $\Omega=\{1,2,\ldots,6\}\times\{1,2,\ldots,6\}\times\{1,2,\ldots,6\}\ldots$ X értékkészlete: $\{1,2,\ldots\}$
- Ipari termelés:
  - X az első selejt gyártásának időpontja. X értékkészlete: $\boldsymbol{R}_+$.
  - X egy adott termék hossza. X értékkészlete: $\boldsymbol{R}_+$ részhalmaza (nem szükséges előzetesen korlátozni).

Valószínűségi változók eloszlása

- Mivel a gyakorlati problémáknál Ω nem mindig adható meg egyértelműen, és absztrakt halmazok helyett szívesebben dolgozunk a valós számokkal, a kulcsfogalom a *valószínűségi változók eloszlása*.
- Legyen B tetszőleges Borel halmaz. $Q_X(B):=P\{\omega:\ X(\omega)\in B\}$ valószínűséget ad meg $\boldsymbol{R}$ Borel halmazain. Ez az *X eloszlása*.

Diszkrét valószínűségi változók

- Definíció: az X *diszkrét valószínűségi változó*, ha értékkészlete $(x_1,\ldots,x_n\ldots)$ legfeljebb megszámlálható.
- A valószínűségi változó definíciójából adódóan $\{\omega: X(\omega)=x_i\}=\{X=x_i\}=\in\mathcal{A}$ azaz $p_i:=P(X=x_i)$ értelmes. Ezek meg is határozzák X eloszlását.
- Véges vagy megszámlálható valószínűségi mezőn minden valószínűségi változó diszkrét.
- Általában nem célszerű a természetszerűen folytonos értékkészletű X diszkretizálása (egyszerűbbek a folytonos modellek).

Példák

- $X(\omega)=c$ minden ω-ra. $Q_X(B)=\begin{cases}0 \text{ ha } c\notin B\\ 1 \text{ ha } c\in B\end{cases}$

Elnevezés: elfajult eloszlás.

$P(X=c)=1$.

- X akkor 1, ha egy adott, p valószínűségű A esemény bekövetkezik és 0 különben (elnevezés: az *A esemény indikátora*).

  $P(X=0)=1-p$

  $P(X=1)=p$

$$Q_X(B)=\begin{cases}0, \text{ ha } 0\notin B \text{ és } 1\notin B\\ p, \text{ ha } 0\notin B \text{ és } 1\in B\\ 1\text{-}p, \text{ ha } 0\in B \text{ és } 1\notin B\\ 1, \text{ ha } 0\in B \text{ és } 1\in B\end{cases}$$

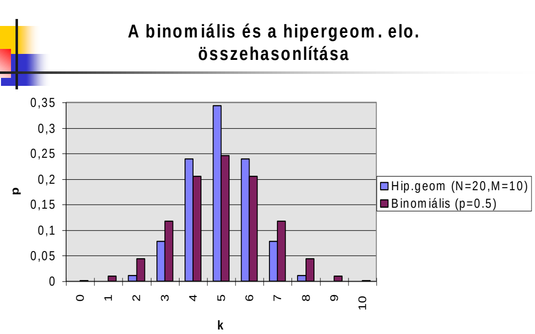
Példák 2.

- Mintavételnél legyen X a mintában levő selejtesek száma.
  - Visszatevéses esetben (binomiális eloszlás):

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}\quad (k=0,\ldots,n)$$

  - Visszatevés nélküli esetben: (hipergeometriai eloszlás)

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}\quad (k=0,\ldots,n)$$

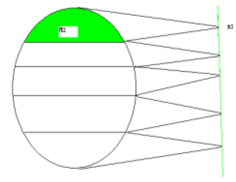


Tulajdonságok

- Ha X diszkrét valószínűségi változó, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tetszőleges függvény, akkor $f(X)$ is diszkrét valószínűségi változó.
- Példa: X a gyártott termék hossza mm-ben. Tegyük fel, hogy $P(X=18)=\ldots=$ $=P(X=22)=1/5$. T.f.h. az ideális a 20 mm. Ekkor a $d=|X-20|$ eloszlása: $P(d=0)=1/5$, $P(d=1) = P(d=2) = 2/5$.

Teljes eseményrendszer

- Ha X diszkrét valószínűségi változó, akkor az $A_i=\{\omega: X(\omega)= x_i\}$ események teljes eseményrendszert alkotnak.



Feltételes eloszlás

- X feltételes eloszlása A eseményre vonatkozóan: $q_i:=P(X=x_i|A)$. Ez is eloszlás:

$$\sum_i q_i = \sum_i P(X=x_i \mid A) = \sum_i \frac{P(X=x_i \cap A)}{P(A)} = 1$$

- Példa: X a magyarkártya-csomagból 2 húzásból kapott pirosak száma.
  - a/ A={az első lap ász}
  - b/ A={az első lap zöld}

Valószínűségi változók függetlensége

- X és Y diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha $P(\{X= x_i\}\cap\{Y= y_k\})=P(X= x_i)P(Y= y_k)$ teljesül minden i,k értékre. (Azaz az X-hez és az Y-hoz tartozó teljes eseményrendszerek függetlenek.)
- Megjegyzések:
  - az elfajult eloszlású valószínűségi változó minden valószínűségi változótól független.
  - Önmagától csak az elfajult eloszlású valószínűségi változó független.

Függetlenek-e?

- A napi középhőmérséklet Budapesten az idén szeptember 30-án és jövőre ilyenkor
- A sajtóhibák száma egy könyv két különböző oldalán
- Két háztartás áramfogyasztása ugyanazon a napon
- Két beteg vérnyomása
- Egy beteg vérnyomása két különböző vizsgálatnál

Binomiális eloszlás alkalmazása

- Visszatevéses mintavétel más realizációja: független kísérletek azonos körülmények között. $P(A)=p$ esemény, végezzünk n (rögzített számú) független kísérletet.
- X: az A bekövetkezésének gyakorisága (pontosan hányszor jött ki az A). X eloszlása binomiális (n,p).
- $X= X_1 + X_2 \ldots + X_n$ ahol X_i az i-edik kísérletnél az A esemény indikátora. Ezek az indikátorok függetlenek is!