

Valószínűségszámítás

12. előadás
2017.12.10.

Véletlen bolyongás: elemi valószínűségek, visszatérés az origóba

- Legyen $u_{2k} = P(S_{2k} = 0)$. Megállapodás szerint $S_0 = 0$, így $u_0 = 1$.

$$u_{2k} = \binom{2k}{k} 2^{-2k} \quad k = 1, 2, \dots$$

- Tul.: A bolyongás 1 valószínűséggel visszatér.
- f_{2k} annak a valószínűsége, hogy először a $2k$ időpontban tér vissza az origóba ($k > 0$)
- f_{2n} nagyságrendje: $cn^{-3/2}$, ami miatt az origóba való visszatérés időpontjának nem véges a várható értéke.
- [szimuláció](#)

Utolsó visszatérés

- A bolyongást $2n$ -ig vizsgálva, annak valószínűsége, hogy a részecske a $2k$ -dik időpontban tér vissza utoljára az origóba:

$$u_{2k} u_{2n-2k} = \frac{\binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}} \approx \frac{1}{\pi \sqrt{k(n-k)}}$$

ha k és n is nagy. Ennek a függvénynek az $n/2$ -ben minimuma van és szimmetrikus is $n/2$ -re.

A tönkremenés valószínűsége

- Érmével játszunk. Nekünk a Ft-unk, ellenfelünknek b Ft-ja van.

Ha fej jön ki, nyerünk 1Ft-ot, ha írás, akkor veszünk ugyanennyit.

Mi a valószínűsége, hogy mi nyerjük el az ellenfelünk összes pénzét?

- Legyen P_i a keresett valószínűség, ha t Ft-unk van.
 - Rekurzió: $P_t = p P_{t+1} + (1-p) P_{t-1}$.
- Megoldás: $P_a = \begin{cases} \frac{a}{a+b}, & \text{ha } p = 1/2 \\ 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^a, & \text{ha } p \neq 1/2 \\ \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^a}, & \text{ha } p \neq 1/2 \end{cases}$

Többdimenziós véletlen bolyongás

- Kétdimenzióban:
 - Lehetséges lépések a tengelyek irányában: $1/4$ - $1/4$ valószínűséggel.
 - Itt is 1 valószínűségű a visszatérés.
- Három dimenzióban:
 - Lehetséges lépések a tengelyek irányában: $1/6$ - $1/6$ valószínűséggel.
 - Itt már 1-nél kisebb valószínűségű a visszatérés (Pólya tétele).

Markov láncok

- Legyen $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathbf{I}^n$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó.
- Eddig a független esetet vizsgáltuk. Most eltekintünk ettől.
- $Q_X(\underline{k}) := P\{\omega: \underline{X}(\omega) = \underline{k}\}$ az X eloszlása \mathbf{I}^d elemein. Reális, de a függetlenségnél gyengébb feltételt keresünk.
- Tegyük fel, hogy $P(X_m = k_m)$ valószínűségeket megadásához elegendő az X_{m-1} értéket ismerni. Azaz $P(X_m = k_m | X_r = k_r \text{ minden } 1 \leq r \leq m-1) = P(X_m = k_m | X_{m-1} = k_{m-1})$ (Markov tulajdonság). Azaz a Markov lánc következő értékének eloszlását meghatározza a lánc jelenlegi állapota.

Példák

- Ha az $X = (X_1, X_2, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathbb{I}^n$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó koordinátái függetlenek, akkor a sorozat Markov lánc.
- Ha $X_n = X_{n-1} + Y_n$ ahol Y_n és X_{n-1} független, akkor X_n Markov lánc.
- További egyszerűsítés: tegyük fel, hogy a $P(X_m = k_m | X_{m-1} = k_{m-1})$ átmenetvalószínűségek nem függenek m -től (homogén Markov lánc). Jelölés: $p_{ij} = P(X_m = j | X_{m-1} = i)$ átmenetvalószínűség-mátrix.
- A hőmérséklet napi értéke feltehetően nem homogén Markov lánc, mert ha ma 10 fok volt, akkor ha nyár van, akkor holnap inkább melegebb lesz, míg télen inkább hidegebb.

Töblépéses átmenetvalószínűségek

$P(X_m = j | X_{m-2} = i)$ kiszámítása:

$$P(X_m = j | X_{m-2} = i) = \sum_{k \in I} P(X_m = j | X_{m-1} = k) P(X_{m-1} = k | X_{m-2} = i)$$

(elnevezés: Chapman-Kolmogorov egyenlet).

azaz a $P^{(2)}$ kétlépéses átmenetvalószínűség-mátrixra $P^{(2)} = P^2$ (mátrix-hatvány). Ugyanígy a k -lépésesre $P^{(k)} = P^k$.

Példa: a szimmetrikus bolyongásnál $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2$, a többi j -re $p_{ij} = 0$. Ebből a kétlépéses átmenetvalószínűségek: $p_{i,i+2} = p_{i,i-2} = 1/4$, $p_{i,i} = 1/2$, a többi j -re $p_{ij} = 0$

Tulajdonságok

- P minden elemére $p_{ij} \geq 0$.
 $\sum_{j \in I} p_{k,j} = \sum_{j \in I} P(X_m = j | X_{m-1} = k) = 1$
- A fenti tulajdonságok P^k -ra is igazak.
- Az i -ből a j elérhető ($i \rightarrow j$), ha van olyan k , melyre $p_{ij}^{(k)} > 0$.
- Az i -és a j állapotok érintkezőek, ha $i \rightarrow j$ és $j \rightarrow i$.
- Az állapotok (I elemei) osztályozhatóak aszerint, hogy érintkezőek-e.

Példák

- A szimmetrikus bolyongásnál bármely két állapot érintkező.
- Az elnyelő falas bolyongásnál (addig játszunk, míg vagy a $-a$ pontba vagy a b pontba nem jutunk), a két végállapot csak önmagával érintkezik.
- A populációs modelleknél (I a populáció egyedszáma) a 0 csak önmagával érintkezik.

További definíciók

- A Markov lánc irreducibilis, ha csak egy osztályból áll.
- $f_i^{(k)} := P(X_k = i, X_{k-1} \neq i, X_{k-2} \neq i, \dots, X_1 \neq i | X_0 = i)$ az i -be való első visszatérés valószínűsége.
- $p_i^{(k)} := P(X_k = i | X_0 = i)$ az i -be való, k -lépésben történő visszatérés valószínűsége. $\sum_k f_i^{(k)} = 1$
- Az i állapot visszatérő, ha $\sum_k f_i^{(k)} = 1$
- Az i állapot periódusa d , ha $d = \text{lko}\{k: p_i^{(k)} > 0\}$.
- A visszatérőség és a periódus is osztálytulajdonság.

Stacionér eloszlás

- Ha megadható olyan π eloszlás az állapottéren, melyre teljesül, hogy $\pi P = \pi$, akkor ezt a Markov lánc stacionér eloszlásának nevezzük. Lineáris egyenletrendszer megoldásaként kaphatjuk meg.
- Nem irreducibilis esetben nem egyértelmű.
- Ha teljesül, hogy tetszőleges X_0 kiinduló eloszlás esetén az X_n eloszlása konvergál a stacionér eloszláshoz, akkor azt mondjuk, hogy a Markov-lánc ergodik.

Ergodikus láncok

- Tétel. Ha a Markov-lánc aperiodikus ($d=1$), irreducibilis és van olyan n , hogy P^n -nek van csupa pozitív elemből álló oszlopa, akkor a Markov-lánc ergodikus.
- A konvergencia általában meglehetősen gyors, bár függ a kiinduló eloszlástól.
- Ergodikus esetben a π funkcionáljai (pl. $E\pi$) közelíthetők a tapasztalati értékeivel:

$$f(\pi) \approx \sum_{i=1}^n f(X_i) / n$$

Érdemes-e pénzt párna alatt tartani?

- Pénzünket olyan részvénybe fektetjük, amelynek értéke egy év alatt 50%-os eséllyel 1,9-szeresére nő és ugyanolyan eséllyel a felére csökken.
- Várható éves hozam: $0,5 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot (-0,5) = 0,2 = 20\%$
- Az évek során pénzünk várható értéke végtelenhez tart.



Érdemes-e pénzt párna alatt tartani? (folytatás)

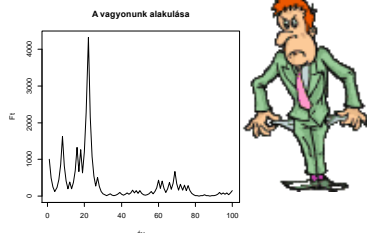
$$S_n = X_1 \cdot X_2 \dots X_n = e^{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)} = \left(e^{\frac{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)}{n}} \right)^n$$

$$\frac{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)}{n} \rightarrow -2,6\%$$

Tehát

$$S_n \rightarrow 0$$

Egy példa-futás:



1000 szimuláció eredménye

- Kiinduló tőke: 1000 Ft

- Min. 1. Kv. Medián Átlag 3. Kv. Max.
0.000e+00 1.000e+00 4.000e+01 2.84e+07 8.44e+03 2.015e+10
- Az esetek több, mint 66%-ában kevesebb lesz a pénzünk 1000 Ft-nál

A pénz fele párna alatt

$$S_n = X_1 \cdot X_2 \dots X_n = e^{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)} = \left(e^{\frac{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)}{n}} \right)^n$$

- Az átlagos éves hozam 10%

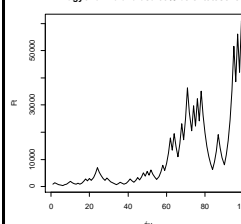
$$\frac{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)}{n} \rightarrow 4,2\%$$

- Tehát $S_n \rightarrow \infty$



Eredmények

A vagyonunk alakulása 50% befektetéssel



- 1000 szimuláció alapján:
- Min. 1.kvartilis Medián
0 6327 45720
- Átlag 3.kvartilis Max.
4692000 638700 4,66*10⁸

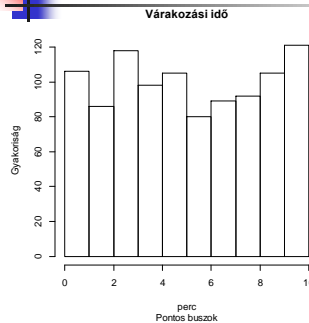
Matematikai feladat az optimális részarány megtalálása

Buszparadoxon

- Az autóbuszok átlagosan 10 perccel követik egymást. Egy buszmegállóba érkezve várhatóan hány perccel kell várni a buszra?
- 5 percet, 10 perccel, végtelen sokat?

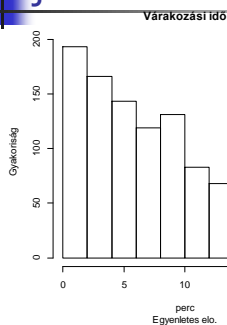


Pontosan 10 perccel jönnek a buszok



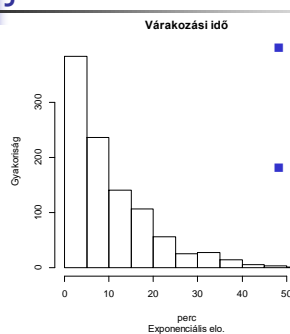
- A várakozási idő egyenletes eloszlás a $[0;10]$ intervallumon, tehát az átlagos várakozási idő 5 perc

Átlagosan 10 perccel jönnek a buszok



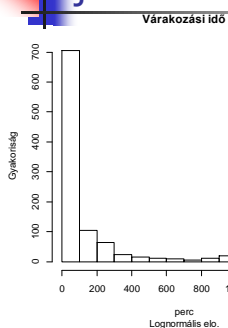
- Ha a követési időköz egyenletes eloszlású a $[0;20]$ perc intervallumon:
- Az átlagos várakozási idő eloszlása háromszög-eloszlás, várható értéke $20/3$ perc

Átlagosan 10 perccel jönnek a buszok



- Ha a követési időköz exponenciális eloszlású 10 perc várható értékkel:
- Az exponenciális eloszlás örökifjú, tehát az átlagos várakozási idő 10 perc

Átlagosan 10 perccel jönnek a buszok



- Ha a követési idő lognormális, 10 perc várható értékkel, a szimulált átlagos várakozási idő 145 perc
- De akár végtelen is lehet!
- Általános képlet:

$$m = \frac{1}{2} d \left(1 + \frac{s^2}{d^2} \right)$$
- Itt m az átlagos várakozási időnk, d az átlagos követési időköz, s pedig a követési