Valószínűségszámítás

11. előadás

2017.12.05

Karakterisztikus függvény

- Komplex értékű valószínűségi változók: $Z=X+iY$, ahol X és Y is valószínűségi változók.
- $E(Z):=E(X)+iE(Y)$.
- X (valós) valószínűségi változó karakterisztikus függvénye: $\varphi_X(t):=E(e^{itX})=E(\cos tX)+iE(\sin tX)$
- Tulajdonságai:
  - $\varphi_X(t)$ $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$ függvény, mely minden X-re létezik.
  - $\varphi_X(0)=1$ minden X-re
  - $|\varphi_X(t)|\le 1$ (mert $|E(e^{itX})| \le E(|e^{itX}|)=1$
  - Ha X és Y függetlenek, $\varphi_{X+Y}(t)= \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$, mert $E(e^{it(X+Y)})= E(e^{itX}e^{itY})= E(e^{itX})\, E(e^{itY})$ a függetlenség miatt.

További tulajdonságok

- Ha $Y=aX+b$, akkor $\varphi_Y(t)= e^{ibt}\varphi_X(at)$
- Bizonyítás: $\varphi_Y(t)= E(e^{i(aX+b)t})= e^{ibt}\,E(e^{iaXt})= e^{ibt}\varphi_X(at)$.
- Kiszámítása az abszolút folytonos esetre:

$$\varphi_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(tx)\, f(x)dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\sin(tx)\, f(x)dx$$

- Példa. Ha X egyenletes eloszlású a [-1,1] intervallumon, akkor

$$\varphi_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{\cos(tx)}{2}dx=\left[\frac{\sin tx}{2t}\right]_{-1}^{1}=\frac{\sin t}{t}$$

- Általában is: φ_X valós, ha X eloszlása szimmetrikus a 0-ra.

A standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye

- Áll.: a standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye:

$$\varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- Ehhez: eleget tesz a $\psi'(t)=-t\,\psi(t)$ differenciálegyenletnek. (Ez lényegében elég is: $(\log \psi(t))'=-t$, amiből $\log \psi(t)=-t^2/2+c$, de $\log(\psi(0))=0$ miatt $c=0$.)

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(tx)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx;\ \psi'(t)=\int_{-\infty}^{\infty}-x\sin(tx)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\psi'(t)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sin(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t\cos(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-t\psi(t)$$

parciális integrálással.

További tulajdonságok

- A karakterisztikus függvény meghatározza az eloszlást (azaz különböző eloszlásokhoz különböző karakterisztikus függvény tartozik).
- Taylor sorfejtés: tegyük fel, hogy $E(X^n)$ véges valamilyen $n\ge 1$ egész számra. Ekkor $t\to 0$ mellett

$$\varphi_X(t)=1+\frac{it}{1!}E(X)+\frac{(it)^2}{2!}E(X^2)+\ldots+\frac{(it)^n}{n!}E(X^n)+o(t^n)$$

  ahol $o(t^n)$ jelentése, hogy t^n–nel osztva is 0-hoz tart, ha $t\to 0$.
- Bizonyítás ötlete: a tétel feltétele esetén $\varphi_X(t)$ n-szer egyenletesen folytonosan deriválható és

$$\varphi_X^{(l)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(ix)^l f(x)dx$$

További tételek

Azaz $\varphi_X^{(k)}(0)= i^k E(X^k)$ és így a szokásos Taylor-sorfejtésből adódik a tétel.

- Ha φ karakterisztikus függvény, akkor egyenletesen folytonos.
- *Folytonossági tétel.* Legyen φ_n karakterisztikus függvények egy sorozata (jelölje Q_n a hozzá tartozó eloszlást). Ha φ_n pontonként konvergál egy φ-hez, mely a 0-ban folytonos, akkor φ is karakterisztikus függvény, és a hozzá tartozó eloszlás éppen a eloszlások Q gyenge határértéke.

Centrális határeloszlás tétel

- Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\sigma^2 = D^2(X)$ véges ($m := E(X_i)$). Tekintsük a standardizált összegüket:

$$Z_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}$$

Ekkor Z_n gyengén konvergál a standard normális eloszláshoz, azaz

$$P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < z\right) \to \Phi(z)$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Bizonyítás vázlata

- Elegendő a Z_n karakterisztikus függvényére belátni, hogy $\varphi_n(t) \to \exp\{-t^2/2\}$.
- Ha $\psi(t)$ jelöli az $X_n - m$ karakterisztikus függvényét, akkor $X_1+X_2+\ldots+X_n-nm$ karakterisztikus függvénye $\psi^n(t)$. Ebből

$$\varphi_n(t) = \left(\psi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

- A maradéktagos Taylor formula miatt

$$\psi(t) = 1 + it\frac{E(X-m)}{1!} + i^2t^2\frac{E(X-m)^2}{2!} + o(t^2) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + o(t^2)$$

Bizonyítás befejezése

$$\varphi_n(t) = \left(\psi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n}o(1)\right)^n \to e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Megjegyzés. A tételt tulajdonképpen már megfigyeltük a szimulációknál.

A nem azonos eloszlású eset

- Ekkor – a nagy számok törvényénél már látott okok miatt – erősebb feltételek kellenek.
- A legegyszerűbb eset: ha $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független, egyenletesen korlátos valószínűségi változók (ekkor $\sigma_i^2 = D^2(X_i)$ véges, $m_i := E(X_i)$), akkor a standardizált összegük:

$$Z_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n - (m_1 + \ldots + m_n)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}}$$

Ha $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2 \to \infty$ akkor Z_n gyengén konvergál a standard normális eloszláshoz, azaz

$$P(Z_n < z) \to \Phi(z)$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Általánosítások

- Ha nem korlátosak a tagok, további feltételekre (pl. magasabb momentumok létezése, hasonló nagyságrendű összeadandók) van szükség.
- Gyenge, a Bernstein tételben látott összefüggőség esetére is általánosítható a tétel.

Konvergenciasebesség

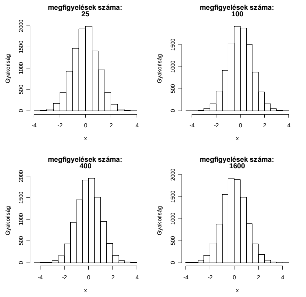
- Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, t.f.h. $m=0$, $\sigma=1$, akkor

$$\sup_z \left| P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} < z\right) - \Phi(z)\right| \le c\frac{E|X_1|^3}{\sqrt{n}}$$

(Berry-Esséen tétel).
- Gyakorlatban nagyon függ az eloszlás alakjától. Például az egyenletes eloszlásra n=12 elég jó közelítést ad, de az exponenciális eloszlásnál n=50 szükséges.

Centrális határeloszlás-tétel: független, azonos, egyenletes eloszlások standardizált összege (n=25,100,400,1600)

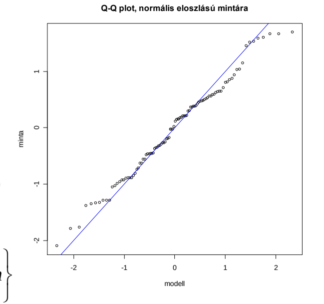
Itt és a következő oldalakon az adott n számú véletlen számot generáltuk, standardizáltuk az összegüket, és ezt 10000-szor megismételtük minden esetben. Ezek után azt vizsgáltuk, hogy a kapott 10000 véletlen szám mennyire van közel a standard normális eloszláshoz.



Eloszlás illeszkedésének vizsgálata: Q-Q plot

A megfigyelt és az illesztett eloszlás kétdimenziós ábrázolása.
Eloszlásfüggvény q-kvantilise: az az érték, amelynél q valószínűséggel kapunk kisebbet: $G^{-1}(q)$
Spec.: q=1/2: medián

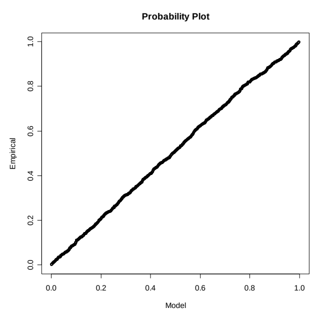
$$\left\{\left(G^{-1}\left(\frac{k}{n+1}\right), X_k^{(n)}\right): k=1,2,\ldots,n\right\}$$



Eloszlás illeszkedésének vizsgálata: P-P plot

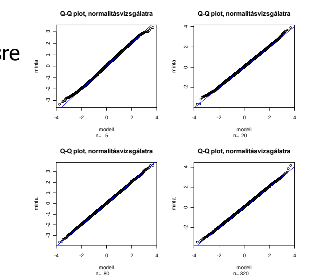
A megfigyelt és az illesztett eloszlás kétdimenziós ábrázolása

$$\left\{\left(\frac{k}{n+1}, G(X_k^{(n)})\right): k=1,2,\ldots,n\right\}$$

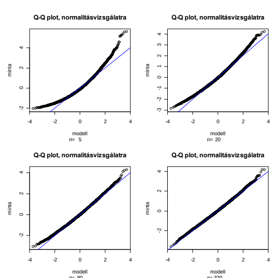


Centrális határeloszlás-tétel: független, azonos, egyenletes eloszlások standardizált összege (n=5,20,80,200)

Már 5 megfigyelésre sem rossz az illeszkedés

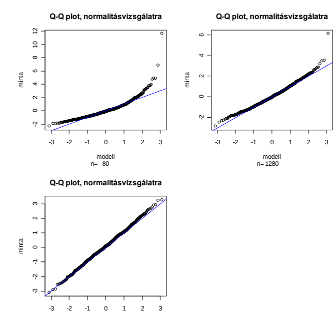


Centrális határeloszlás-tétel: független, azonos, exponenciális eloszlások standardizált összege (n=5,20,80,200)



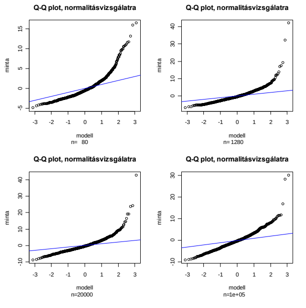
Centrális határeloszlás-tétel: független, azonos, Pareto (k=3) eloszlások standardizált összege (n=80,1280,20000)

Itt nagyon lassú a konvergencia



Centrális határeloszlás-tétel: független, azonos, Pareto (k=2) eloszlások standardizált összege (n=80,1280,20000,100000)

Itt nincs konvergencia



Stabilis eloszlások

- A normális eloszlás kitüntetett szerepe azon alapult, hogy teljesítette az ún. *stabilitást*: ha X,Y független, F eloszlásfüggvényűek, akkor tetszőleges a,b esetén megadhatók α β számok, hogy aX+bY eloszlásfüggvénye $F(\alpha z+\beta)$. (Azaz aX+bY ugyanabba az eloszláscsaládba tartozik, mint az összeadandók.)
- Belátható, hogy független, azonos eloszlású változók összegének normálás utáni határeloszlása csak stabilis lehet. Ugyanakkor minden ilyen stabilis eloszlás elő is áll határeloszlásként.
- A centrális határeloszlás tétel következménye, hogy nincs más véges szórású stabilis eloszlás. Ugyanakkor nem véges szórású van: pl. a Cauchy eloszlás, melynek sűrűségfüggvénye $f(x)=1/\pi(1+x^2)$

Véletlen szám generálás

LCG: $\boxed{X_{n+1} = (aX_n + c) \mod m}$

(0 < m, 0 <a< m, 0 ≤c< m, 0 ≤X_0< m)

***Jól bevált paraméterválasztások*:**

1. Borland C/C++ $m=2^{32}$, a=1664525, c=1013904223
2. Delphi, Pascal $m=2^{32}$, a=134775813, c=1

Véletlen szám generálás inverz módszerrel

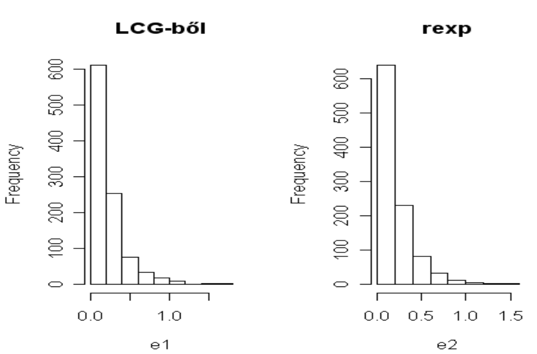
Tétel: Legyen X val. vált., F eloszlásfüggvénnyel, amely szigorúan monoton növekedő és folytonos. Ekkor

i. F(X) egyenletes eloszlású [0,1] –en
ii. Ha U ~ U(0,1) akkor $F^{-1}(U)$ eloszlásfüggvénye F .

Pl.: Ha X ~ exp(λ) $\longrightarrow$ F(x)=1-exp(- λx)
$\longrightarrow$ $F^{-1}(x)$= -ln(1-x)/ λ
$\longrightarrow$ -ln(1-U)/ λ ~ exp(λ)

Kiterjesztése: általánosított inverz: $F^{-1}(x)$= inf{x | F(x)=y}

Exponenciális minta (λ=5)



Neumann módszer

Legyen f(x) tetszőleges sűrűségfüggvény,g(x) pedig olyan sűrűségfüggvény, amelyre f(x) < Mg(x), valamely M>1 esetén és g(x)-ből könnyen tudunk mintát venni (tipikus példa az egyenletes eloszlás).

***Algoritmus*:**

1. Vegyünk mintát: *u=>U(0,1)* -ből, *x=>g(x)* -ből
2. Ha *u<f(x)/Mg(x),* akkor x-et elfogadjuk
3. Különben elutasítjuk, és 1-be lépünk.

Normális eloszlású véletlen szám

Box-Müller módszer

- Legyen U,V független, E[0;1] eloszlású. Ekkor

$$\sqrt{-2\ln U}\,\sin(2\pi V),\sqrt{-2\ln U}\,\cos(2\pi V)$$

  két független standard normális eloszlású változó lesz.

Véletlen bolyongás

- $S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$ a bolyongást végző „részecske" helyzete n lépés után. A lépések egymástól függetlenek.

$$X_i = \begin{cases} +1 & p \text{ valószínűséggel} \\ -1 & 1\text{-}p \text{ valószínűséggel} \end{cases}$$

- Tipikusan p=1/2 (szimmetrikus bolyongás)
- Példa: X_i az i-dik érmedobásnál a nyereményünk (1 Ft-ot nyerünk, ha fej, 1Ft-ot vesztünk, ha írás), S_n pedig az össznyereményünk n játék után.

Általánosabb modell: Markov láncok

- Legyen $\underline{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n): \Omega\to\boldsymbol{I}^n$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó.
- Eddig a független esetet vizsgáltuk. Most eltekintünk ettől.
- $Q_X(\underline{k}) := P\{\omega: \underline{X}(\omega)=\underline{k}\}$ az *X eloszlása* $\boldsymbol{I}^d$ elemein.Reális, de a függetlenségnél gyengébb feltételt keresünk.
- Tegyük fel, hogy $P(X_m = k_m)$ valószínűségeket megadásához elegendő az X_{m-1} értéket ismerni. Azaz $P(X_m = k_m | X_i = k_i$ minden $1\le i \le m-1$-re$)=$ $P(X_m = k_m | X_{m-1} = k_{m-1})$ (Markov tulajdonság). Azaz a Markov lánc következő értékének eloszlását meghatározza *a* lánc jelenlegi állapota.