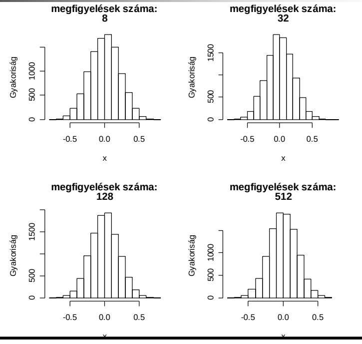
Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematikai elemző BSC-seknek

2017/2018 1. félév

10. előadás
november 27.

Független, egyenletes eloszlású megfigyelések átlaga (m=0, $\sigma_j=j$)



Összefoglalás

- A megfigyelt eltérés a független esetben a szórásnégyzettől függ.
- Összefüggő esetben pedig ezen kívül a korreláció a döntő.
- A törvény nem jelenti azt, hogy az eddig nem szerepelt értékek a jövőben a vártnál gyakoribbak lesznek, hanem csupán az eloszlás szerint kapott nagyszámú érték állítja helyre a várt gyakoriságokat.

Műveletek eseményekkel

- Legyenek A_1,... események.
- limsup A_n : végtelen sok A_n–hez tartozó elemi események. Formálisan:

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

- liminf A_n : Azon elemi események, amelyek véges sok kivételével minden A_n–ben benne vannak.

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Borel-Cantelli lemma

- Ha A_1, A_2,... események és $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$ akkor P(lim sup A_n)=0.
- Bizonyítás.

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} C_n$$

ahol

$$C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, C_n \supseteq C_{n+1} \ldots$$

Ebből

$$P(\limsup A_n) = P(\lim_{n\to\infty} C_n) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

B-C lemma megfordítása

- Kellenek feltételek: Ω=[0,1], A_n=[0,1/n] P="hosszúság" esetén P(lim sup A_n)=0, de

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty$$

- Ha viszont az események függetlenek, akkor megfordítható (2. B-C lemma): ekkor $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty$ esetén P(limsup A_n)=1.

$$P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{m} A_k) = 1 - \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A}_k)$$

$$= 1 - \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - P(A_k)) \ge 1 - \lim_{m\to\infty} \exp\{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)\} \to 1$$

Nagy számok erős törvénye

- Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású m várható értékkel. Tegyük fel, hogy $E(X^4)$ véges. Ekkor

$$P\left(\left\{\omega : \frac{X_1(\omega)+X_2(\omega)+\ldots+X_n(\omega)}{n} \underset{n\to\infty}{\to} m\right\}\right)=1$$

  azaz $(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n \to m$ 1 valószínűséggel.
- Megjegyzés: a tétel állítása már abból is következik, hogy m véges (de a bizonyítás sokkal nehezebb erre az esetre).

Bizonyítás.

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)\right]^4 = nE\left[(X_1-m)^4\right]+6\binom{n}{2}\left(E(X_1-m)^2\right)^2 \le cn^2$$

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)\right| > n\varepsilon\right) \le \frac{E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)\right]^4}{(n\varepsilon)^4} \le \frac{cn^2}{(n\varepsilon)^4} = \frac{c'}{n^2}$$

amiből a Borel-Cantelli lemma miatt $P(A_\varepsilon)=0$, ahol

$$A_\varepsilon = \limsup\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m\right| > \varepsilon\right\} \qquad P\left\{\omega : \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)}{n} - m \to 0\right\} = 1 - P\left(\bigcup_k A_{1/k}\right) = 1$$

A nagy számok törvényének néhány alkalmazása

- Korlátos valószínűségi változókra teljesül a nagy számok erős törvénye.
- Monte Carlo módszerek: véletlen számokat használnak
  - A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlású, egymástól független véletlen számokat szimulálunk: $X_1, X_2, \ldots$ és ezek segítségével közelíthetünk például integrálokat:

$$\frac{f(X_1)+f(X_2)+\cdots+f(X_n)}{n} \to E(f(X)) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

  - Az egyenletes eloszlásból más eloszlások is megkaphatóak

Konvolúció

- Független valószínűségi változók összegének eloszlása
- Képlet az abszolút folytonos esetre:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(z-u)\,du$$

- Bizonyításhoz a teljes valószínűség tétel megfelelője

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A \mid X=u) f_X(u)\,du \qquad \text{ebből}$$

$$P(X+Y<z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) P(X+Y<z \mid X=u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) P(Y<z-u)\,du$$

ezután z szerint deriválva kapjuk az állítást.

Példák

- Exponenciális eloszlások konvolúciója (független, azonos, λ paraméterű exponenciális eloszlások összegének sűrűségfüggvénye):

$$h_{X+Y}(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(z-u)}\,du = \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z}\,du = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

ha z>0 és 0 különben. n tagú összegre indukcióval bizonyítható, hogy az összeg sűrűségfüggvénye

$$h_n(z) = \frac{\lambda^n z^{n-1} e^{-\lambda z}}{(n-1)!}$$

ha z>0 és 0 különben (elnevezés: n-ed rendű, λ paraméterű gamma eloszlás).

Egyenletes eloszlások konvolúciója

- Független, azonos, a [0,1] intervallumon egyenletes eloszlások összegének sűrűségfüggvénye):

$$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} \int_0^z 1\,du = z \quad (0<z<1) \\ \int_{z-1}^1 1\,du = 2-z \quad (1\le z<2) \end{cases}$$

- egyenletes eloszlás

Alkalmazások

- Korlátos valószínűségi változókra teljesül a nagy számok erős törvénye.
- Kérdés: lehet-e nemelfajult valószínűségi változó a határérték?
- Tétel: ha $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók, b_n számsorozat, melyre $b_n \to \infty$ és $(X_1+X_2+\ldots+X_n)/b_n \to X$ 1 valószínűséggel, akkor X 1 valószínűséggel állandó.
- Tétel. Ha $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók, b_n számsorozat, melyre $b_n \to \infty$ 1 valószínűséggel, és $(X_1+X_2+\ldots+X_n)/b_n \to X$ sztochasztikusan, akkor X 1 valószínűséggel állandó.
- A bizonyítás ötlete: sztochasztikusan konvergens sorozatnak mindig kiválasztható 1 valószínűséggel konvergens részsorozata.

Gyenge konvergencia

- Definíció. $X_n \to X$ gyengén, ha az eloszlásfüggvényeikre teljesül: $F_n(z) \to F(z)$ az F minden folytonossági pontjában.
- Megjegyzés. Ez a konvergencia nem mond semmit a valószínűségi változók közelségéről. $\Omega=[0,1]$, P="hosszúság", $X_n=I_{[0,0.5]}$ $X=I_{[0.5,1]}$ esetén $F_n(z)=F(z)$, azaz teljesül a gyenge konvergencia.
- A fentiekből az is látszik, hogy a határértéknek csak az eloszlása érdekes.

Tulajdonságok

- Azt nem célszerű megkövetelni, hogy F minden pontjában teljesüljön a konvergencia:
- $X_n=\delta_{-1/n}$ esetén $X_n \to X=\delta_0$ 1 valószínűséggel. $F_n(0)=1$, de $F(0)=0$ (F balról folytonos). A többi pontban teljesül a konvergencia: $F_n(z) \to 0$, ha $z<0$, $F_n(z)=1$, ha $z>0$.
- Ha $X_n \to X$ sztochasztikusan, akkor $X_n \to X$ gyengén is.
- Def. $X_n \to X$ L_2-ben, ha $E(X_n-X)^2 \to 0$ $(n \to \infty)$.
- A Csebisev egyenlőtlenség értelmében az L_2 -beli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia. (A nagy számok gyenge törvényeinél is L_2–beli konvergenciát bizonyítottunk.)

Generátorfüggvény

- Legyen X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. A generátorfüggvénye $g_X(z):=E(z^X)=P(X=0)+zP(X=1)+z^2P(X=2)+\ldots$
- Tulajdonságai:
  - Véges, ha $|z|\le 1$
  - Meghatározza az X eloszlását:
    - $P(X=0)= g_X(0)$
    - $P(X=1)= g_X'(0)$
    - $P(X=2)= g_X''(0)/2$ stb.
  - Ha X és Y függetlenek, nemnegatív egész értékűek: $g_{X+Y}(z)= g_X(z)g_Y(z)$, mert $E(z^{X+Y})= E(z^X z^Y)= E(z^X)\,E(z^Y)$ a függetlenség miatt.

Példák

- Elfajult eloszlásra: $g_X(z)= z^k$.
- Indikátorváltozóra $g_X(z)= pz+1-p$
- Binomiális eloszlásra $g_X(z)=(pz+1-p)^n$
- Poisson eloszlásra

$$E(z^X)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda z}=e^{\lambda(z-1)}$$

Karakterisztikus függvény

- Komplex értékű valószínűségi változók: Z=X+iY, ahol X és Y is valószínűségi változók.
- E(Z):=E(X)+iE(Y).
- X (valós) valószínűségi változó karakterisztikus függvénye: $\varphi_X(t):=E(e^{itX})=E(\cos tX)+iE(\sin tX)$
- Tulajdonságai:
  - $\varphi_X(t)$ $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ függvény, mely minden X-re létezik.
  - $\varphi_X(0)=1$ minden X-re
  - $|\varphi_X(t)|\le 1$ (mert $|E(e^{itX})| \le E(|e^{itX}|)=1$
  - Ha X és Y függetlenek, $\varphi_{X+Y}(t)= \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$, mert $E(e^{it(X+Y)})= E(e^{itX}e^{itY})= E(e^{itX})\,E(e^{itY})$ a függetlenség miatt.