

Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematikai elemző BSC-seknek

2017/2018 1. félév

Zempléni András

zempleni@ludens.elte.hu

<http://zempleni.elte.hu>

1. előadás: Bevezetés

- Irodalom, követelmények
- A félév célja
- Valószínűségszámítás tárgya
- Történet
- Alapfogalmak
- Valószínűségek kiszámítása

Irodalom

- Hozzáférhető jegyzetek
 - Balázs M., Tóth B.: Valószínűségszámítás 1. jegyzet matematikusoknak és fizikusoknak. Elérési helye: <http://math.bme.hu/~balazs/vsz1jzctb-t.pdf>
 - Arató-Prokaj-Zempléni: Valószínűségszámítás elektronikus jegyzet (tankonyvtar.hu)
- Tankönyvek:
 - Prékopa: Valószínűségelmélet
 - Rényi: Valószínűségszámítás
 - S. Ross: A First Course in Probability
- Példatár
 - Bognárné-Mogyoródi-Prékopa-Rényi-Szász: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény

Számonkérés

- Gyakorlatok
 - gyakorlati jegy: csoportonkénti zh-k alapján
- Vizsga: írásbeli, később egyeztetendő időpontban
- Előadások anyaga: zempleni.elte.hu/inf_a_el17.html

Cél

- Valószínűségszámítás alapjainak ismertetése
- Feladatmegoldási készség kialakítása (elsősorban gyakorlaton)
- Alkalmazási lehetőségek bemutatása (szimulációk, véletlen számok stb.)
- Matematikai statisztika (következő félév) megalapozása

Valószínűségszámítás helye a tudományok között

- Matematikai tudomány, mert precízen megfogalmazott axiómáxra épül.
- Gyakorlati alkalmazásai: statisztikai következtetések levonása (pl.: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej jött ki, akkor 99.9% valószínűséggel állítható, hogy az érme nem szabályos).

Történeti áttekintés 1.

- Első ismert feladat 1494-ből: játék idő előtti abbahagyása esetén hogyan osztozzanak? Helyes megoldás több, mint 100 évvel későbbi: Pascal (1623 – 1662), Fermat (1601 – 1665)
- Könnyen adható szimulációs megoldás (precíz számítás a gyakorlaton)
- Cardano (1540 körül) könyvet írt a kockajátékokhoz kapcsolódó valószínűségszámítási kérdésekről

Történeti áttekintés 2.

- de Mére lovag kérdése:
 - Egy kockával négyszer dobva előnyös arra fogadni, hogy lesz hatos, de 2 kockával 24-szer dobva már nem előnyös arra fogadni, hogy lesz (6,6) a dobások között.
 - Megoldás: Pascal, Fermat (1654)
- Huygens (1657): Az első valószínűségszámítás könyv
- de Witt, Halley (1671): életjáradék-számítás valószínűségi alapon

Történeti áttekintés 3.

- Jacob Bernoulli (1713): Ars Conjectandi (nagy számok törvénye)
- XVIII-XIX. sz: Moivre, Bayes, Gauss, Poisson
- Buffon: geometriai valószínűség bevezetése – paradoxonok
- XIX.sz: Csebisev, Markov, Ljapunov

Történeti áttekintés 4.

- Axiomatizálás: Kolmogorov (1933)
- Modern alkalmazások:
 - Információelmélet (Shannon)
 - Játékelmélet (Neumann)
 - Matematikai statisztika (Fisher)
 - Sztochasztikus folyamatok
- Magyar tudósok:
 - Jordán Károly (1871-1959)
 - Rényi Alfréd (1921-1970)

Véletlen kísérletek

- Olyan kísérletekkel foglalkozunk, amelyek eredményét nem tudjuk előre biztosan megmondani (kockadobás, lottóhúzás, meteorológiai, tőzsdei események stb).
- Az összes lehetséges eredmény: eseménytér.

Alapfogalmak

- Eseménytér
 - Kísérlet egy lehetséges kimenetele: elemi esemény, jelölése ω .
 - Elemi események összessége: eseménytér, Ω .
 - Ω részhalmazai: események (A, B, C, \dots) .
 - Esemény akkor következik be, ha az őt alkotó elemi események valamelyike bekövetkezik.

Példák

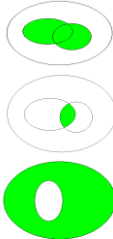
- Kockadobás: $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$. Ha az A esemény: páros számot dobtunk, akkor $A = \{2, 4, 6\}$.
- Érmét kétszer feldobva: $\Omega = \{II, IF, FI, FF\}$
 $A = \{II, IF\}$ az az esemény, hogy az első dobás írás.
- Érmét addig dobunk, míg fejet nem kapunk.
 $\Omega = \{F, IF, IIF, \dots, \omega_\infty\}$ ahol $\omega_\infty = III \dots$ (azaz minden dobás írás)

Események

- Esemény: Ω részhalmaza
- Speciális események:
 - Ω (biztos esemény)
 - \emptyset (lehetetlen esemény)
- Az események összessége: \mathcal{A} (halmazrendszer Ω részhalmazaiból)
- Műveletek eseményekkel: szokásos logikai műveletek = halmazműveletek

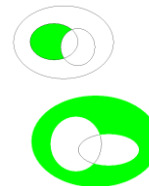
Műveletek eseményekkel

- $A \cup B$: vagy A vagy B bekövetkezik (az is lehet, hogy mindkettő)
- $A \cap B$: A és B is bekövetkezik
- A esemény ellentettje: \bar{A}



Tulajdonságok

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (\text{De Morgan})$$
$$\overline{\bar{A}} = A \quad \overline{\bar{\Omega}} = \emptyset$$



Példák

- Kockadobás:
 $A = \{\text{páros számot dobtunk}\}$
 $B = \{\text{legalább 3-ast dobtunk}\}$
 $A \cap B = \{4, 6\}$
 $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
 $A \setminus B = \{2\}$
 $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$

Valószínűség

- Szemléletes megfelelője: *relatív gyakoriság*.
Ha n egymástól függetlenül, azonos körülmények között végrehajtott kísérletből az adott A esemény k -szor következett be, akkor a relatív gyakoriság k/n .
- Nagy n -re a relatív gyakoriság egy fix szám körül ingadozik: ezt nevezzük az A valószínűségének. **Kocka-kísérlet**

A valószínűség

- Jele: $P(A)$
- A relatív gyakoriság tulajdonságaiból:
 - Nemnegatív: $P(A) \geq 0$ minden A-ra
 - Egymást kizáró eseményekre, azaz, ha $A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additivitás)
 - $P(\Omega) = 1$
- (Ω, \mathcal{A}, P) : valószínűségi mező

Tulajdonságok 1.

- Additivitás n eseményre: ha A_1, A_2, \dots, A_n páronként kizáró események, akkor $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$
- Bizonyítás: indukcióval.
- $P(\emptyset) = 0$.
- Bizonyítás: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ felbontásból és az additivitásból

Tulajdonságok 2.

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Bizonyítás: $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ felbontásból és az additivitásból

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Bizonyítás: $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$ felbontásból, az additivitásból és az előző tulajdonságból.

Eseménytér

- Nem mindig lehet minden $A \subseteq \Omega$ esemény (pl. nagy – megszámlálhatónál nagyobb – Ω esetén), ezért az \mathcal{A} esemény-rendszer struktúrája: σ -algebra.
- 1. $\Omega \in \mathcal{A}$
- 2. $A \in \mathcal{A} \rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ (azaz \mathcal{A} zárt a komplementer-képzés műveletére)
- 3. \mathcal{A} zárt a megszámlálható unió műveletére

Példák σ -algebrára

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$
- Ω minden részhalmazából álló halmazrendszer (hatványhalmaz, $\mathcal{P}(\Omega)$)

Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- (Ω, \mathcal{A}, P) : Kolmogorov-féle valószínűségi mező, ha
 - Ω nemüres halmaz
 - \mathcal{A} az Ω részhalmazainak σ -algebrája
 - $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ halmazfüggvény (valószínűség), melyre
 1. $P(\Omega) = 1$
 2. σ -additivitás: ha A_1, A_2, \dots páronként kizáró események, akkor $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

Véges valószínűségi mező

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Jelölés: $p_i = P(\omega_i)$.

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = P(\Omega) = 1$$
 az additivitásból.

$$P(A) = P(\cup_{i: \omega_i \in A} \omega_i) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i$$

Azaz a p_i nemnegatív, 1 összegű számok meghatározzák a valószínűséget.

Klasszikus valószínűségi mező 1

$p_i = 1/n$ minden i -re (azonos valószínűségűek az elemi események).

Ekkor $P(A) = \frac{k}{n}$ ahol k az A elemszáma,

n pedig az összes esetszám.

Másképpen: $P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetszám}}$.

Klasszikus valószínűségi mező 2

- A klasszikus valószínűségi mező alkalmazása előtt mindig meg kell győződni a feltételekről!
- Példa: **születésnap**
- Sokáig a valószínűséget általában is így próbálták definiálni, de ez nem fed le minden esetet.

Visszatevéses mintavétel

- N termék, melyből M selejtes
 - n elemű minta visszatevéssel
 - A : pontosan k selejtes van a mintában ($k=0, \dots, n$)
- azaz a valószínűség kifejezhető a $p=M/N$ selejtarány segítségével:

$$P(A) = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}$$
$$P(A) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Mintavétel

Visszatevés nélküli mintavétel

- N termék, melyből M selejtes
- n elemű minta visszatevés nélkül
- A : pontosan k selejtes van a mintában ($k=0, \dots, n$)

$$P(A) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Mintavétel

A valószínűség további tulajdonságai

A valószínűség végesen is additív:

ha A_1, A_2, \dots, A_n páronként kizáró események, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Bizonyítás. $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ választással alkalmazzuk a σ -additivitást.

Tehát a korábban belátott tulajdonságok a Kolmogorov-féle valószínűségi mezőre is érvényesek.