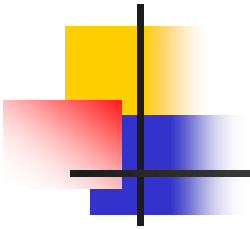
Matematikai statisztika előadás+gyakorlat informatika BSC „A” szakosoknak

2023/2024 1. félév

Zempléni András



1. előadás: Bevezetés

- Irodalom, követelmények
- A félév célja
- Matematikai statisztika tárgya
- Történet
- Alapfogalmak

Irodalom

- Jegyzet

  Bognárné-Göndőcs-…: Matematikai statisztika
- Tankönyv

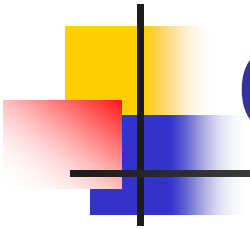
  Bolla-Krámli: Statisztikai következtetések elmélete
- Példatár

  Móri-Szeidl-Zempléni: Matematikai statisztika példatár
- Programozáshoz:
  - R nyelv dokumentációi, magyarul például
  - https://kovacsam.web.elte.hu/R%20bevezetes.R
    http://cran.r-project.org/doc/contrib/Solymosi-Rjegyzet.pdf
  - Angolul: http://zempleni.elte.hu/Stat_R_Prohle_Zempleni

Követelmények

- A tárgy felvételéhez a valószínűségszámítás c. tárgy elvégzése szükséges
- A jelenlét kötelező az előadáson és a gyakorlaton is (3-3 hiányzás lehetséges), a kari szabályzatnak megfelelően
- Összevont számonkérés részei:
  - 3 alkalommal 60 perces dolgozat, 50 pontért: az 5., 10. héten a gyakorlatokon és a félév vége után, mindegyik Canvasban,

  Lesz javítási lehetőség is (a dolgozatoknak legalább 15 pontosoknak kell lenniük)
  - Beadandó önálló feladat (statisztikai elemzés), 50 pontért. Az elemzés több részből áll. Legalább 20 pontot el kell érni!
  - Pontok szerezhetők házi feladatokkal, előadáskvízekkel is
  - Tervezett ponthatárok: 2-es 70 ponttól,…, 5-ös 160 ponttól

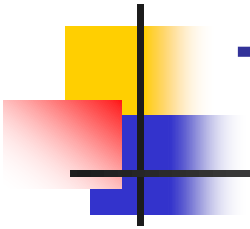


Cél

- Matematikai statisztika alapjainak ismertetése
  - Leíró statisztika (rövid bevezető)
  - Becsléselmélet
  - Hipotézisvizsgálat
  - Többdimenziós statisztika elemei
- Alkalmazási készség kialakítása
- R programnyelv használata

A matematikai statisztika tárgya

- Következtetések levonása adatok alapján
  - Ipari termelés
  - Mezőgazdaság
  - Szociológia (közvéleménykutatások)
  - Természettudományok
    - Meteorológia (pl. klímaváltozás)
    - Genetika (chiptechnológia)
  - Pénzügyi adatok stb.



Történet

- Népszámlálások már az ókorban is voltak
- Táblázatokat a biztosítók már többszáz éve használnak
- Maga a tudomány fiatal tudomány, alig 100 éves a múltja
  - Angliai mezőgazdasági alkalmazások voltak az elsők
- Fejlődése felgyorsult az utóbbi évtizedekben (számítógépek jóvoltából)

Adatok

- Mintavétel a populációból: eredménye a (statisztikai) minta
- A mintavétel módja is lényeges (legegyszerűbb eset: bármelyik elem ugyanakkora valószínűséggel kerül a mintába)
- A mintavétel eredménye: (statisztikai) minta: $x_1,x_2,\ldots,x_n$ (számsorozat)
- Ugyanakkor egy másik, hasonló mintavételnél más mintát kapnánk, azaz az adott minta véletlen kísérlet eredménye. Ha a minta véletlen jellegét vizsgáljuk: $X_1,X_2,\ldots,X_n$ valószínűségi változó-sorozat. Lényeges különbség az előző félévhez képest: az eloszlása nem (vagy csak részben) ismert.

Matematikai statisztika helye a tudományok között

- Matematikai tudomány, mert a valószínűségszámítás eredményeire épül.
- Ugyanakkor a statisztika mindennapi alkalmazása nem mindig kellően precíz (teljesülnek-e a feltételek?) Ezért lényeges, hogy a valószínűségszámítási eredményeket alkalmazva fogalmazzuk meg következtetéseinket.

Statisztikai elemzés lépései

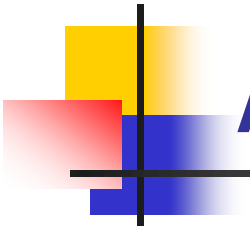
- Tervezés (mit vizsgálunk, hogyan gyűjtjük az adatokat)
- Adatgyűjtés
- Kódolás (ha szükséges)
- Ellenőrzés: leíró statisztikákkal
- Elemzés: matematikai statisztika módszereivel

Leíró statisztika

- Nem a véletlen hatását vizsgálja, hanem a konkrét minta
  - megjelenítése,
  - jellemzőinek kiszámítása

  a feladata.
- Adatok elrendezhetők táblázatban (fontos: forrás feltüntetése), illetve ábrázolhatók grafikusan.

Adatok típusai (skálák)



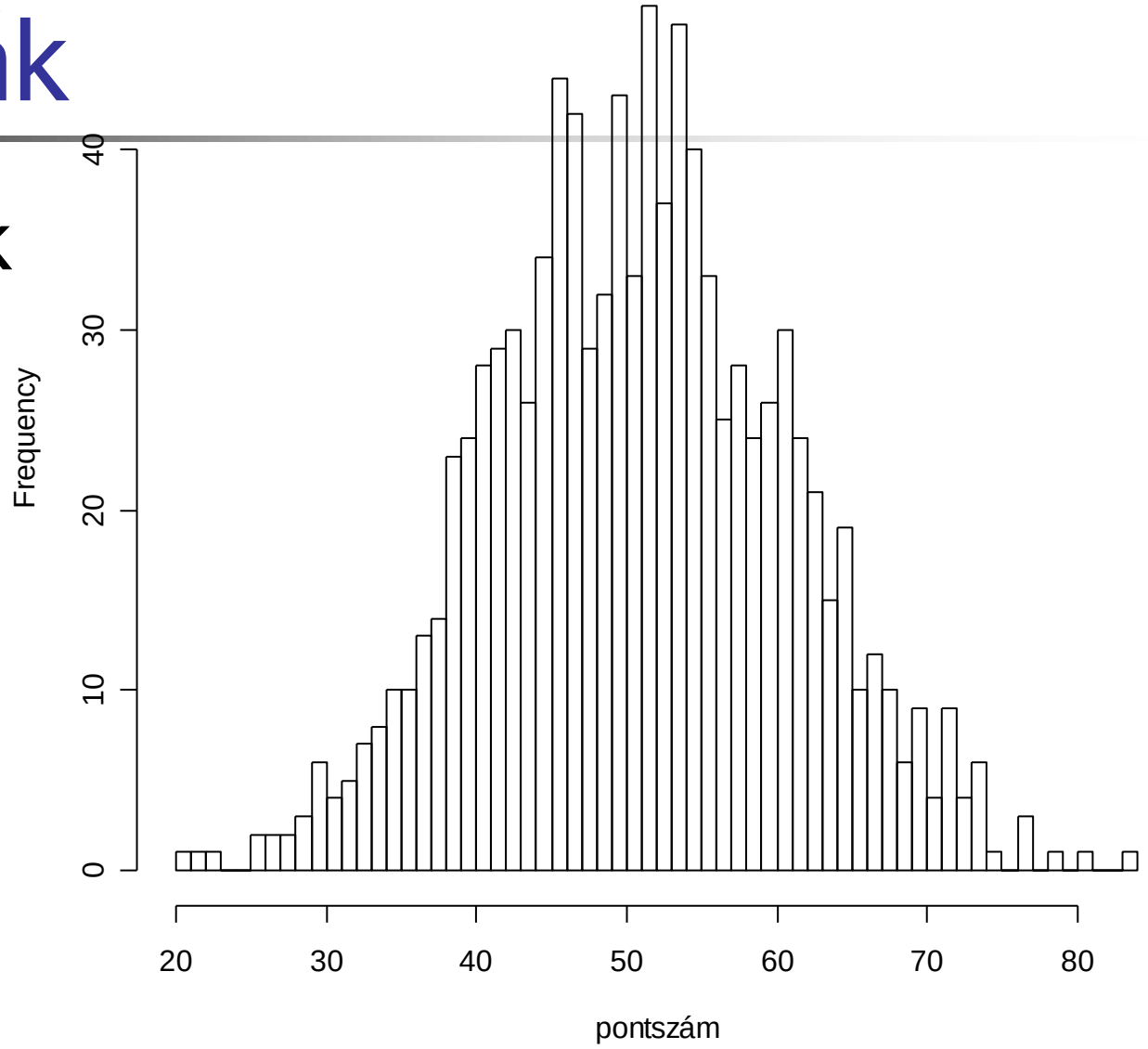
- Nominális: csak gyakoriságot tudunk számolni (nem, foglalkozás, nemzetiség)
- Ordinális (rendezett): pl. értékelés szavakkal (rossz-közepes-jó), sorrend egyértelmű, kvantilisek számolhatók
- Intervallum (pl. hőmérséklet: különbség egyértelmű, de hányados nem)
- Arány (itt minden matematikai művelet értelmes), ez szerencsére a leggyakoribb

Hisztogram

- Adatainkat osztályokba soroljuk (mindegyiket pontosan egybe, pl. az i-edik osztály: $a_i \leq x < a_{i+1}$), a csoportok relatív gyakoriságai (r_i) megegyeznek az osztály fölé rajzolt téglalap területével, tehát a téglalap magassága $m_i = r_i/(a_{i+1}-a_{i+1})$.
- Összterület:1 (hasonló a sűrűségfüggvényhez)

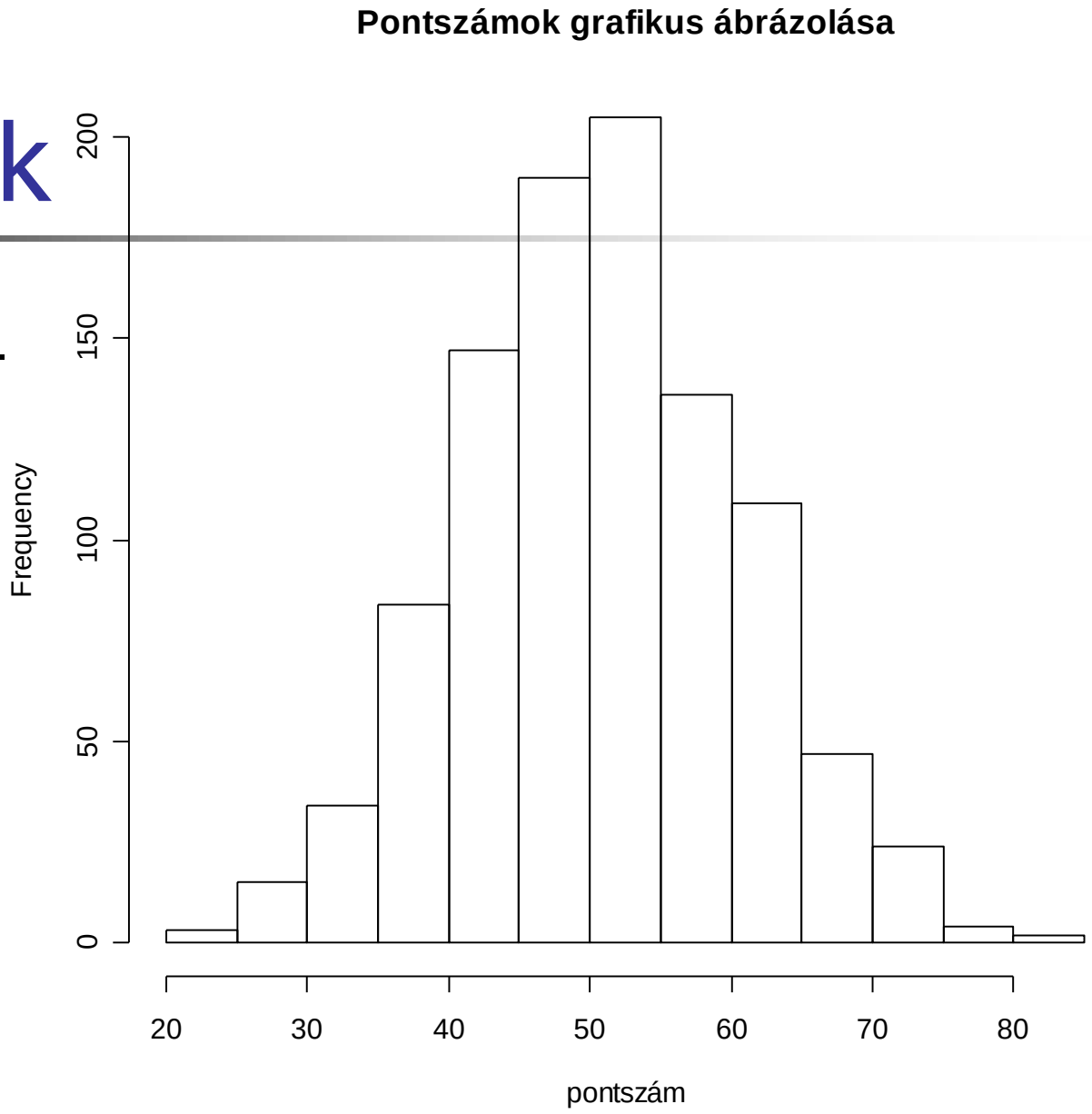
Példák

Túl sok osztály



Példák

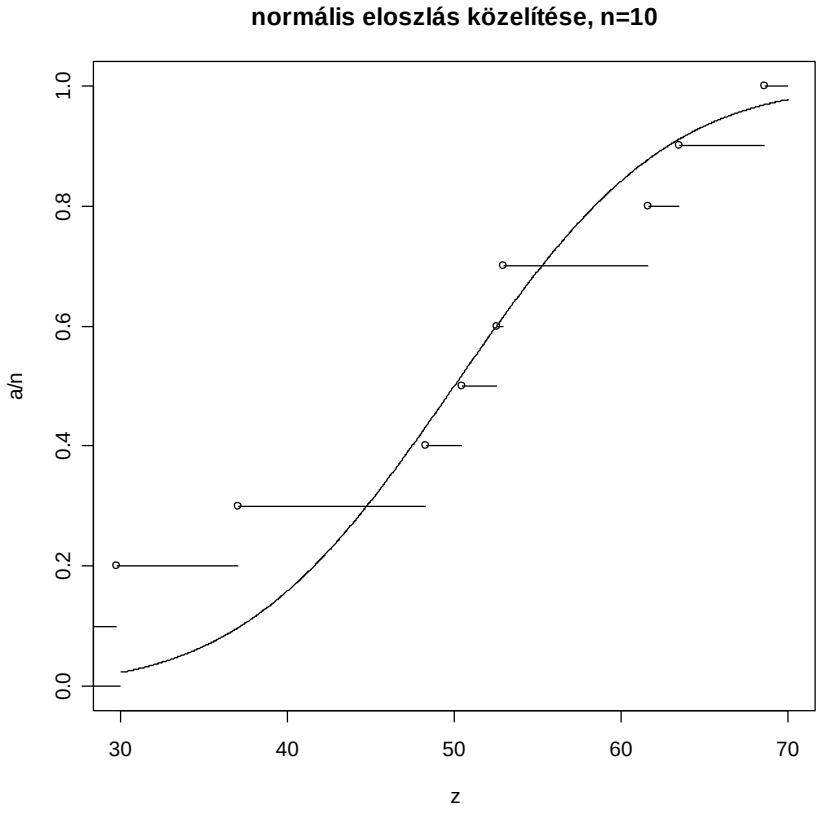
Jó osztály-szám

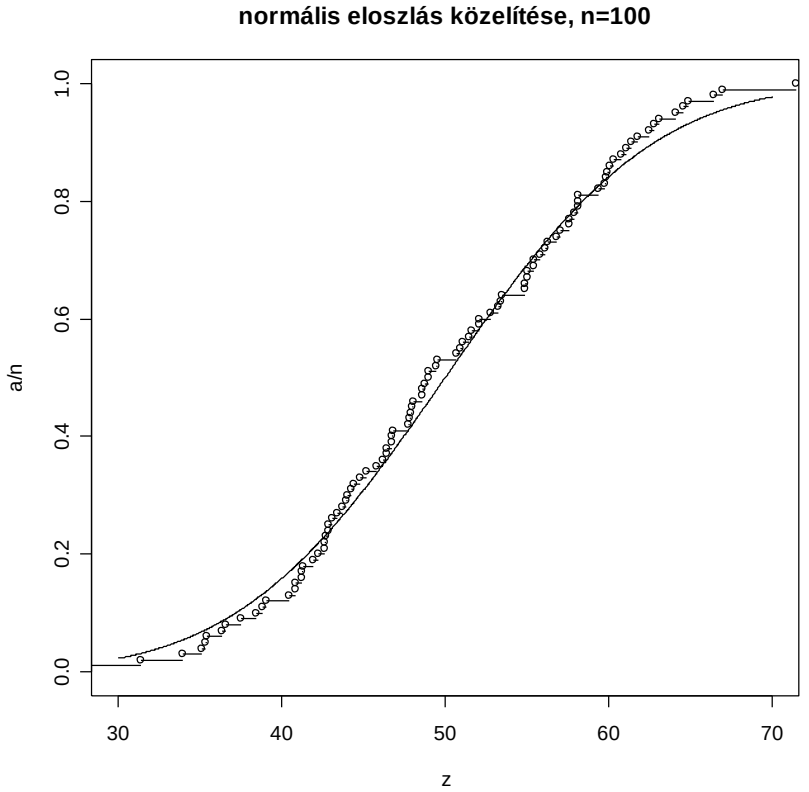


Tapasztalati eloszlás

- Minden megfigyeléshez $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 1/n súlyt rendel. Valószínűségeloszlás!
- Mintaátlag éppen ennek az eloszlásnak a várható értéke.
- Tapasztalati eloszlás eloszlásfüggvénye: tapasztalati eloszlásfüggvény: F_n (lépcsősfüggvény). $F_n(z)=k/n$, ha $x_k^{(n)} < z \le x_{k+1}^{(n)}$ $x_0^{(n)}=-\infty$, $x_{n+1}^{(n)}=\infty$
- Ha a minta $X_1,X_2,\ldots,X_n$ valószínűségi változó-sorozat, $F_n(z)$ is valószínűségi változó.

Példa


normális eloszlás közelítése, n=10
a/n
z
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
30
40
50
60
70


normális eloszlás közelítése, n=100
a/n
z
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
30
40
50
60
70

Középértékek: átlag

- Mintaátlag: $\bar{x} := \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$
  - ha az egyes értékek (l_i) gyakoriságai (f_i) adottak:

$$\bar{x} := \frac{f_1 l_1 + \ldots + f_k l_k}{n}$$

  - Ha csak az osztályközökbe eső értékek gyakoriságát ismerjük, az egyes értékeket becsüljük az osztályközéppel és alkalmazzuk az előző képletet.

Medián

- A sorbarendezett minta középső eleme (ha páros sok eleme van: a két középső átlaga).
- Közelítés osztályközös gyakoriságokra (kerekített értékekre):

$$Me = x_l + \frac{\frac{n}{2} - f'_{me-1}}{f_{me}} h$$

  - x_l: a mediánt magában foglaló osztály alsó határa
  - f'_{me}: kumulált gyakoriság a mediánt megelőző osztályig bezárólag
  - f_{me} : a mediánt magában foglaló osztály gyakorisága
  - h: a mediánt magában foglaló osztály szélessége.
  - n: a minta elemszáma

Módusz

- A leggyakoribb (tipikus) érték.
- Az eloszlás lehet unimodális, bimodális vagy polimodális (egy-, két- vagy többmóduszú).
- Meghatározása: A gyakorisági poligon maximumhelye (a modális osztályköz középértéke).

Közelítése osztályközös esetre

$$Mo = x_{mo} + \frac{f_0 - f_{0-1}}{2f_0 - f_{0-1} - f_{0+1}} h$$

Ahol

x_{mo} a móduszt tartalmazó osztály alsó határa

f_0 a móduszt tartalmazó osztály gyakorisága

f_{0-1} a móduszt tartalmazó osztályt megelőző osztály gyakorisága

f_{0+1} a móduszt tartalmazó osztályt követő osztály gyakorisága

h a móduszt tartalmazó osztály szélessége

Lényeges, hogy ez a három osztály azonos szélességű legyen

Kvantilisek

- Elméleti kvantilis: abszolút folytonos, szigorúan monoton F esetén $q_z=F^{-1}(z)$
- Általában: inf{x:F(x)>z}
- A tapasztalati eloszlás kvantilisei: tapasztalati kvantilisek. Esetleg lineáris interpolációval lehet pontosítani a becsléseinket.
- z=1/2: medián.
- z=1/4, 3/4: kvartilisek

Kvantilisek kiszámítása

Osztályközös gyakorisági sorból

$$Q_p = x_i + \frac{pn - f'_{i-1}}{f_i} h_i$$

Ahol
x_i a kvantilist tartalmazó osztály alsó határa
n a minta elemszáma
f'_{i-1} kumulált gyakoriság a kvantilist tartalmazó osztályt megelőző osztállyal bezárólag
f_i a kvantilist tartalmazó osztály gyakorisága
h_i a kvantilist tartalmazó osztály szélessége

Alapstatisztikák grafikus megjelenítése: boxplot (doboz-diagram)

Az egyes dobozok az alsó kvartilistól a felső kvartilisig tartanak. Közép-vonal a medián. A vonalak a teljes terjedelmet felölelik, ha ez az egyes irányokban nem nagyobb a kvartilisek közötti különbség 1.5-szeresénél. Ha ezen kívül is vannak pontok, azokat külön-külön jeleníti meg.