A gyakorló dolgozat feladatainak megoldás-vázlata (képletek nélkül, hasonló formában Önök is leírhatják majd a dolgozat megoldását)

1. P(X<1,5)=P(X=0)+P(X=1)=1/16+4/16
2. Egyedül az R(X,X+Z)>0 (konkrétan 1/sqrt(2), mert azonos eloszlású és független az X és Z)
3. Egy kalapban van N fehér golyó és M piros golyó. Addig húzunk a kalapból visszatevéssel,míg piros golyót nem kapunk. X jelöli a szükséges húzások számát. Milyen eloszlású X? A válasz: Geometriai eloszlás
4. Elég a karakterisztikus függvényekre belátni a konvergenciát a folytonossági tétel miatt. Mivel a standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye exp{-t^2/2}, ezért az állítás következik a Taylor-sorfejtésből és abból, hogy független összeadandókra a karakterisztikus függvények összeszorzódnak. Így a standardizált összeg karakterisztikus függvénye közelíthető (1-t^2/n)^n-nel, amiből már adódik az állítás.
5. A teljes valószínűség tételét alkalmaztuk a Bayes tétel bizonyatásánál. Példa: nemenként eltérő a színvakság valószínűsége. H ebből egy véletlenszerűen kiválasztott személy színvakságának valószínűségét szeretnénk megkapni, akkor ehhez kell a teljes valószínűség tétele. Ha fordítva, azt kérdezzük, hogy egy színvak milyen valószínűséggel nő, akkor ehhez a Bayes tétel kell.
6. E(z^X)=sum_{k=3}^végtelen (z^k 2^(-k+2))=4(z/2)^3/(1-z/2))=z^3/(2-z). Ebből E(X)=g'(1), ami a (3z^2(2-z)+z^3)/(2-z)^2 függvény helyettesítési értéke az 1 helyen, azaz 4. Ez egyébként abból is kijön, hogy a val.változónk egy ½ paraméterű geometriai változó +2.
7. Indukcióval belátható, hogy D^2(X_1+…+X_n)=D^2(X_1)+…+D^2(X_n)+sum_(i<j) 2cov(X_i,X_j) azaz most nD^2(X_1)+n(n-1)r, ami rögzített D és negatív r esetén negatív lenne, ha n elég nagy, de ez lehetetlen, azaz r nem lehet ebben az esetben negatív.
8. P((X-0,5)^2<z)=P(|X-0,5|<sqrt(z))=P(-sqrt(z)<X-0,5< sqrt(z)) (feltehetjük, hogy 0<z<1/4, mert különben triviális a keresett valószínűség (0 ha z<0, 1 ha z>1/4). Ez utóbbi éppen F_X((sqrt(z)+0,5)-F_X(0,5- sqrt(z)). A sűrűségfüggvény ebből deriválással kapható meg: és az adódik, hogy ez 1/sqrt(z) az adott intervallumon.
9. D^2(2X-Y)= D^2(2X)+ D^2(-Y)-2cov(2X,-Y)=4 D^2(X)+ D^2(Y)-0=5 D^2(X)=50/4.
10. Az átlag a várható értékhez konvergál, ami most ½.
11. E(X)=integrál_0^1 2xxdx=2/3.
12. cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y), ami X=Y miatt éppen D^2(X), ami az ½ paraméterű indikátorváltozóra éppen ¼.
13. f(x)=x nem sűrűségfüggvény a (0;1) intervallumon, mert nem 1 az integrálja.
14. F(x)=e^x eloszlásfüggvény a negatív félegyenesen, de az x^2-4 nem monoton a (-2;2) intervallumon, a harmadik pedig nem balról folytonos.