Segédanyag a Valószínűségszámítás tantárgyhoz

2020. január 29.

Definíció. **Véges valószínűségi mező:** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas, ahol:

- $\{\omega_1, ..., \omega_n\} = \Omega$: eseménytér; elemei: elemi események
- $\{A, B, ...\} = \mathcal{A} \subset 2^\Omega$, ahol $A, B, ...$: események
- $P : \mathcal{A} \to [0; 1]$ valószínűség
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(A) \geq 0$ minden A eseményre
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ minden A és B egymást kizáró eseményre ($A \cap B = \emptyset$).

Definíció. **Kolgomorov-féle vsz.-i mező:** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas, ahol:

- Ω: nemüres halmaz
- $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ σ-algebra ($\emptyset \in \mathcal{A}$, zárt a komplementerképzésre és a megszámlálható unióra)
- P: $\mathcal{A} \to [0; 1]$ halmazfüggény, amelyre
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$-ra
  - páronként kizáró $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ eseményekre

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
Permutáció: n elem összes lehetséges sorrendje: $n!$

Ismétléses permutáció: n elem összes lehetséges sorrendje, ha ezek közül $k_1, ..., k_m$ darab megegyezik: $\frac{n!}{k_1! \cdot ... \cdot k_m!}$

Adott n elem, ebből k darabot kiveszünk

	Kombináció: a kihúzás sorrendje NEM számít (nem számozottak az elemek)	**Variáció**: a kihúzás sorrendje számít (számozottak az elemek)
Visszatevés nélkül (ismétlés nélkül)	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Visszatevéssel (ismétléssel)	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k

Mintavétel: Adott N termék, ezek közül M selejtes. Az összes termékből kiveszünk n darabot. Mi a valószínűsége, hogy ezek között k selejtes lesz? ($k = 0, 1, ..., n$)

- Visszetevés nélkül: $\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- Visszatevéssel: $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ahol $p = \frac{M}{N}$ a selejtarány

---

Feltételes valószínűség: Ha B bekövetkezett, mi a valószínűsége, hogy A bekövetkezik?
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ($P(B) \neq 0$)

Definíció. **Teljes eseményrendszer (TER)** $B_1, B_2, ...$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha

- $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden i$\neq$j-re
- $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$

Tétel. **Teljes valószínűség tétele:** Legyen $B_1, B_2, ...$ teljes eseményrendszer, A tetszőleges esemény, $P(B_j) > 0$ minden j-re
Ekkor $P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)$.

Tétel. **Bayes-tétel:** Legyen $B_1, ..., B_n$ teljes eseményrendszer, A tetszőleges esemény, $P(B_j) > 0$ minden j-re
Ekkor $P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)}$.

Definíció. **Események függetlensége:** A és B események függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (A esemény bekövetkezése nem befolyásolja B esemény bekövetkezését, és fordítva).

Definíció. **Valószínűségi változó:** X: $\Omega \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, azaz amire $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden B$\subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazra.

Definíció. **Valószínűségi változó eloszlása:** $Q_X(B) = P(X \in B) = P(\omega : X(\omega) \in B)$

Definíció. **Diszkrét valószínűségi változó:** értékkészlete legfeljebb meg-

számlálhatóan végtelen, azaz $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ elemekből áll.
Ekkor eloszlása: $p_i := P(X = x_i) = P(\omega : X(\omega) = x_i)$

Tétel. **Binomiális tétel:** $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Geometriai sor összege: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, ha |q|<1.
Konvergenciatartományon belül "be lehet deriválni" egy végtelen sort, így $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, ha |q|<1.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, X: $\Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó.

Definíció. **Várható érték** X várható értéke: EX=$\int\limits_{\Omega} X\,dP$, ha ez létezik. Kiszámítását ld. később az egyes eseteknél.

Definíció. **l. momentum** : EX^l=$\int\limits_{\Omega} X^l\,dP$, ha ez létezik.

Definíció. **X szórásnégyzete** : D^{2}X=E[(X-EX)]^2 = EX^2-E^{2}X.

Definíció. **X szórása** : DX=$\sqrt{D^2X}$.

Legyen X diszkrét valószínűségi változó, ami az x_1,x_2,... értékeket veszi fel, p_1,p_2,... valószínűségekkel. Ekkor EX=$\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_k p_k$, ha a végtelen összeg abszolút konvergens. Ugyanígy EX^l=$\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_k)^l p_k$, ha a végtelen összeg abszolút konvergens.
Nevezetes diszkrét eloszlások:

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlása	EX	D^{2}X
Karakterisztikus (indikátorvált.)	Ind(p)	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Geometriai (Pascal)	Geo(p)	$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ k=1,2,...	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hipergeometriai	Hipgeo(N, M, n)	$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ k=0,1,...,n	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$
Binomiális	Bin(n, p)	$P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ k=0,1,...,n	np	$np(1-p)$
Negatív binomiális	NegBin(n, p)	$P(X=k) = \binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$ k=n,n+1,...	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$
Poisson	Poi(λ)	$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ k=0,1,...	λ	λ

Előfordulásuk:

- Indikátor változó: egy p valószínűségű esemény bekövetkezik-e vagy sem
- Geometriai: hányadikra következik be először egy p valószínűségű esemény
- Hipergeometriai: visszatevés nélküli mintavétel
- Binomiális: visszatevéses mintavétel
- Negatív binomiális: hányadikra következik be n. alkalommal egy p valószínűségű esemény

Állítás. Legyenek $X, Y, X_1, ..., X_n$ valószínűségi változók; $c, c_i, a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $E(X+Y) = EX + EY$;
- $E(cX) = cEX$;
- $E\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i EX_i$;
- $D^2(aX+b) = a^2 D^2 X$.

Definíció. **X val.változó eloszlásfüggvénye:** $F_X(x) = P(X < x)$.

Amennyiben egyértelmű, melyik val.változó eloszlásfüggvényéről van szó, F(x)-et írunk.

Állítás. Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:

- $0 \le F_X(x) \le 1$;
- monoton növő;
- balról folytonos;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Állítás. Tetszőleges X val.változó esetén

- $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$;
- $P(a < X \le b) = F(b+) - F(a+)$.

Definíció. **X val.változó abszolút folytonos**, ha létezik olyan f(x) függvény, amelyre $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Ilyenkor f(x)-et **sűrűségfüggvény**nek hívjuk.

Állítás. Legyen X abszolút folytonos eloszlású. Ekkor

- f(x)=F'(x) (esetleg néhány pont kivételével);
- f(x) $\ge$ 0;
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$;
- $P(X = x) = 0 \quad \forall x$-re;

- $P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Abszolút folytonos val.változó várható értéke: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$.

Abszolút folytonos val.változó l. momentuma: $EX^l = \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x)\, dx$.

Nevezetes abszolút folytonos eloszlások:

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlásfüggvény	Sűrűségfüggvény	EX	D²X
Egyenletes	$E(a,b)$	$\begin{cases} 0 & \text{ha } x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \le b \\ 1 & \text{ha } b < x \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a < x \le b \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{ha } x \ge 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \ge 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Standard normális	$N(0,1^2)$	$\Phi(x) = ...$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in \mathbb{R}$	0	1
Normális	$N(m,\sigma^2)$	...	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2

Állítás. **Val.változó függvényének várható értéke**

Legyen X val. változó; g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény.
Ekkor

- $E(g(X)) = \sum_k g(x_k) p_k$, ha X diszkrét
- $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$, ha X abszolút folytonos

Mindkét esetben a várható érték létezéséhez a szumma/integrál abszolút konvergenciájára van szükség.

Állítás. **Abszolút folytonos val.változó szigorúan monoton függvényének eloszlás- és sűrűségfüggvénye**

Legyen X abszolút folytonos val. változó; g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonosan differenciálható függvény, $g' \ne 0$. Ekkor

a.) Y=g(X) eloszlásfüggvénye:

$$F_Y(y) = F_{g(X)}(y) = \begin{cases} F_X(g^{-1}(y)) & \text{ha g szig. mon. növő} \\ 1 - F_X(g^{-1}(y)) & \text{ha g szig. mon. csökkenő} \end{cases}$$

b.) Y=g(X) sűrűségfüggvénye:

$$f_Y(y) = f_{g(X)}(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|[g^{-1}(y)]'\right| = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

Állítás. **Standardizálás**

Legyen X$\sim N(m,\sigma^2)$. Ekkor $\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Állítás. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Állítás. $\Phi^{-1}(q) = -\Phi^{-1}(1-q) \quad 0 < q < 1$

Definíció. **Val.változók konvolúciója:** Legyenek X és Y független val.változók. X és Y konvolúciójának (jel. X∗Y) az X+Y val.változót nevezzük.

Állítás. **A konvolúció eloszlásának meghatározása**

- Diszkrét eset: $P(X+Y=k) = \sum_{l=0}^{\infty} P(X=l) \cdot P(Y=k-l)$
- Folytonos eset: $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(z-u) du$

Állítás. Legyenek $X_1, ..., X_n$, X és Y független val. változók

- $X_1 \sim \mathrm{Ind}(p), ..., X_n \sim \mathrm{Ind}(p) \quad \Rightarrow \quad X_1 + ... + X_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$
- $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, $Y \sim \mathrm{Bin}(m,p) \quad \Rightarrow \quad X+Y \sim \mathrm{Bin}(n+m,p)$
- $X_1 \sim \mathrm{Geo}(p), ..., X_n \sim \mathrm{Geo}(p) \quad \Rightarrow \quad X_1 + ... + X_n \sim \mathrm{NegBin}(n,p)$
- $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda_2) \quad \Rightarrow \quad X+Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1+\lambda_2)$
- $X \sim N(m_1,\sigma_1^2)$, $Y \sim N(m_2,\sigma_2^2) \quad \Rightarrow \quad X+Y \sim N(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Definíció. **Valószínűségi vektorváltozó:** $\mathbf{X}$: $\Omega \to \mathbb{R}^d$ mérhető függvény, azaz amire $\{\omega : \mathbf{X}(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden B$\subseteq \mathbb{R}^d$ nyílt halmazra.

Definíció. **Valószínűségi vektorváltozó eloszlása:**
$Q_{\mathbf{X}}(B) = P(\mathbf{X} \in B) = P(\omega : \mathbf{X}(\omega) \in B)$

Definíció. **X valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye:**
$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} < \mathbf{x}) = P(X_1 < x_1, ..., X_d < x_d)$.

Állítás. **Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:**

- $0 \le F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \le 1$;
- minden koordinátájában monoton növő;
- minden koordinátájában balról folytonos;
- $\lim_{x_1,...,x_d \to \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1,...,x_d) = 1$;
- $\lim_{x_i \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1,...,x_d) = 0$ minden i-re.

Definíció. **X valószínűségi vektorváltozó abszolút folytonos** , ha létezik

olyan $f_{\mathbf{X}}(x_1,...,x_d)$ függvény, amelyre
$F_{\mathbf{X}}(x_1,...,x_d) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} ... \int\limits_{-\infty}^{x_d} f_{\mathbf{X}}(t_1,...,t_d)\, dt_1...dt_d.$
Ilyenkor $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$-et **sűrűségfüggvény**nek hívjuk.

Mostantól $d = 2$ lesz, és a következő jelöléseket és elnevezéseket használjuk:
- $F_{X,Y}(x,y) = P(X < x, Y < y)$ $\rightsquigarrow$ együttes eloszlásfüggvény
- $F_X(x) = P(X < x)$, $F_Y(y) = P(Y < y)$ $\rightsquigarrow$ peremeloszlásfüggvények
- $f_{X,Y}(x,y)$ $\rightsquigarrow$ együttes sűrűségfüggvény
- $f_X(x), f_Y(y)$ $\rightsquigarrow$ peremsűrűségfüggvények

Állítás.
- $F_X(x) = \lim\limits_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y)$ és $F_Y(y) = \lim\limits_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y)$
- $F_{X,Y}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v)\, dudv$
- $f_{X,Y}(x,y) = \partial_y \partial_x F_{X,Y}(x,y) = \partial_x \partial_y F_{X,Y}(x,y)$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dxdy = 1$
- $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy$ és $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx$

Állítás.
- X, Y függetlenek $\Leftrightarrow$ $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$
- X, Y függetlenek $\Leftrightarrow$ $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$
- Diszkrét esetre: X, Y függetlenek $\Leftrightarrow$ $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$
- X, Y függetlenek $\Rightarrow$ $E(XY) = EX \cdot EY$

Definíció. X **és** Y **kovarianciája:** $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left[(X - EX)(Y - EY)\right].$
Köv.: $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY$.
Elnevezés: ha $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy X és Y **korrelálatlanok**.

Állítás.
- Ha X és Y függetlenek egymástól, akkor korrelálatlanok is.
- Ha X és Y korrelálatlanok, akkor ebből **nem** következik, hogy függetlenek is!!!!!

Állítás. **A kovariancia tulajdonságai:**
Legyenek $X, Y, X_1, ..., X_n$ valószínűségi változók, $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor
- $\mathrm{Cov}(X,X) = D^2X$
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
- $\mathrm{Cov}(X,a) = 0$
- $\mathrm{Cov}(aX,bY) = ab\mathrm{Cov}(X,Y)$
- $D^2(X+Y) = D^2X + D^2Y + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$
- $D^2(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} D^2X_i + 2 \sum\limits_{1\le i<j\le n} \mathrm{Cov}(X_i,X_j)$
- X,Y függetlenek $\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

Definíció. X **és** Y **korrelációja:** $R(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{DXDY}$.
A korreláció két valószínűségi változó lineáris kapcsolatát méri:
- $R > 0$ $\Rightarrow$ pozitív a kapcsolat
  $R < 0$ $\Rightarrow$ negatív a kapcsolat
- $R^2 \sim 1$ $\Rightarrow$ erős a kapcsolat
  $R^2 \sim 0.5$ $\Rightarrow$ közepes a kapcsolat
  $R^2 \sim 0$ $\Rightarrow$ gyenge a kapcsolat

Legyenek X és Y valószínűségi változók. Y-nak X-re vonatkozó feltételes várható értéke – $\mathrm{E}(Y|X)$ – precíz definiálására nem vállalkozok, úgy gondoljunk rá, mint egy valószínűségi változóra; és ha X egy adott értéket vesz fel – $\mathrm{E}(Y|X = x)$ –, akkor mint konkrét számra.
$\mathrm{E}(Y|X)$ abszolút folytonos eloszlások esetén a következő képlettel számítható:
$$\mathrm{E}(Y|X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy \Bigg|_{x=X}$$
ahol $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ a feltételes sűrűségfüggvény.

Állítás. Legyen g mérhető függvény.
- $E[g(X)|X] = g(X)$
- X, Y függetlenek $\Rightarrow E(Y|X) = EY$

Feladat: Y val. változót szeretnénk közelíteni X val. változó tetszőleges függvénye segítségével:
$$\mathrm{E}[Y - f(X)]^2 \longrightarrow \min_f \qquad \rightsquigarrow \text{Megoldása: } f_{opt} = \mathrm{E}(Y|X)$$

Feladat: Y val. változót szeretnénk közelíteni X val. változó lineáris függvénye segítségével:

$$\mathrm{E}[Y-(aX+b)]^2 \longrightarrow \min_{a,b} \quad \rightsquigarrow \text{ Megoldása: } \quad \begin{aligned} a_{opt} &= \tfrac{Cov(X,Y)}{D^2(X)} \\ b_{opt} &= EY - a_{opt}EX \end{aligned}$$

Tétel. **Markov-egyenlőtlenség:** Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, $X \geq 0$ val.változó, $\varepsilon > 0$ tetsz.
Ekkor $\mathrm{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[g(X)]}{g(\varepsilon)}$.
Spec., ha $g(x) = x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$
Tétel. **Csebisev-egyenlőtlenség:** $\mathrm{P}(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$.

Legyen $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók sorozata.
Definíció. **1 valószínűségű konvergencia:**
$X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *1 valószínűséggel*, ha $P(\{\omega : X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\to} X(\omega)\}) = 1$.
Definíció. **Gyenge konvergencia:** $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *gyengén*, ha az eloszlásfüggvényeikre $F_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x)$ $\quad F$ minden folytonossági pontjában.

Tétel. **Nagy számok törvénye (NSZT):**
Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. val. változók, $\mathrm{E}X_1 = m < \infty$.
Ekkor $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \overset{n\to\infty}{\to} m$ 1 valószínűséggel.

Tétel. **Centrális határeloszlás tétel (CHT):**
Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. val. változók, $\mathrm{E}X_1 = m$, $D^2(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Ekkor $\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma} \overset{n\to\infty}{\to}$ N(0,1) gyengén, azaz $P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \overset{n\to\infty}{\to} \Phi(x)$.